வடமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்துடன் இணைந்து
தொண்டைமானாறுவெளிக்களநிலையம் நடாத்தும்

FWC

Field Work Centre

தவணைப் பரீட்சை, யூலை - 2019
Term Examination, July - 2019

தரம் :- 12 (2020) **இணைந்த கணிதம் –B**

பகுதி - B

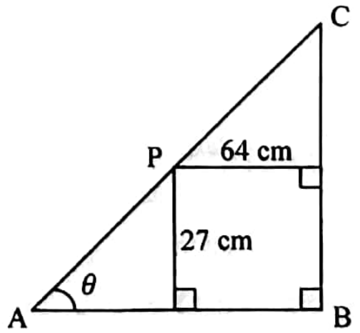
11) (a) நேர் மெய்யெண்கள் α, β இனை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாடு $f(x) = x^2 - x + P = 0$ எனக் கொள்வோம். $\frac{1}{(\alpha^2+1)}, \frac{1}{(\beta^2+1)}$ இனை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $g(x) = 0$ எனின் $g(x) = [(P-1)^2 + 1]x^2 + (2P-3)x + 1 = 0$ எனவும் அத்துடன் $g(x) = 0$ வேறுவேறான மெய்மூலங்களை கொண்டிருப்பின் P ஆனது $0 < P < 1/4$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(i) $f(x)$ ஆனது பொருந்தும் மூலங்களை கொண்டு இருந்தால மாத்திரம் $g(x)$ ஆனது பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டு இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(b) $p, q \in R$, $g(x) = x^3 + px^2 + qx - 2$ எனக் கொள்வோம். $(x-1)$ ஆனது $g(x)$ இன் ஒருகாரணியாகவும் $g(x)$ இனை $(x-2)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதி ஆனது $g(x)$ இனை $(x-1)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியின் இருமடங்காகும், எனின் p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. $f(x)$ இனை $(x+2)$ ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு $g(x)$ ஆகவும் மீதி 5 உம் ஆயின் $f(x)$ இனைக் காண்க.

12) (a) $x \neq 2$ இற்கு $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$ எனக்கொள்வோம். $x \neq 2$ இற்கு $f'(x) = -\frac{x+4}{(x-2)^3}$ எனவும் $f''(x) = \frac{2(x+7)}{(x-2)^4}$ எனவும் காட்டுக. $f'(x), f''(x)$ என்பன முறையே $f(x)$ இன் முதலாம், இரண்டாம் பெறுதிகளாகும். அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப்புள்ளி ஆகியவற்றை காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

(b) செங்கோண முக்கோணி ABC யில் $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ ஆகும். செம்பக்கம் AC மீதுள்ள புள்ளி P ஆகும். P யிலிருந்து பக்கங்கள் AB, BC யிற்கான செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே 27 cm, 64 cm ஆகும். கோணம் $C\hat{A}B = \theta$ எனின் செம்பக்கம் AC யின் நீளத்தை θ இன் சார்பில் காண்க. இதிலிருந்து $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ ஆகும் போது AC இழிவெனக் காட்டி AC இன் இழிவு நீளத்தைக் காண்க.



13) புள்ளி $P(x_1, y_1)$ இலிருந்து நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ இற்கான செங்குத்து தூரம் $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் எனின் அவற்றுக்கிடையான கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் $\frac{a_1+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ எனக் காட்டுக.

செவ்வகம் ABCD இன் பக்கங்கள் AB = 8 அலகுகள், AD = 6 அலகுகள் ஆகும். மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி $E \equiv (1, 1)$ எனவும் AB இன் சமன்பாடு $3x - 4y + \lambda = 0$ எனவுத் தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு $\lambda > 0$

i. λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ii. DC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

iii. AD யின் சமன்பாடு $4x + 3y + \mu = 0$ இங்கு $\mu > 0$ எனின் μ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

iv. $3x - 4y + \lambda = 0, 4x + 3y + \mu = 0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14) (a) தீர்க்க

(I) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta = 0$ (II) $\sqrt{3}\,(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \cos 2\theta$

(b) வழமையான குறியீட்டில் ஒரு முக்கோணிக்குரிய சைன் நெறியையும், கோசைன் நெறியையும் கூறுக.

ΔABC இல் $a = 3b$, $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$ எனின் $c = \sqrt{7}\, b$ எனவும் $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ எனவும் $\tan A = -3\sqrt{3}$ எனவும் காட்டுக.

(c) $\cos\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right) = \sin\left(4\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ எனக் காட்டுக.

(15) (a) A, B ஆகிய புகையிரத நிலையங்களுக்கு இடையில் இரு நேரான சமாந்தர பாதைகள் உண்டு. ஒருகுறித்த நாளில் X, Y என்னும் இரு புகையிரதங்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலையம் A ஐ ஒவ்வொரு பாதை வழியே ஒரே நேரத்தில் முறையே $3u, u$ வேகங்களுடன் கடந்து செல்கின்றன. அவற்றின் ஆர்முடுகல்கள் முறையே $f, 3f$ ஆகும். Y ஆனது X ஐக் கடக்கும் கணம் வரைக்கும் மாத்திரம் இரு புகையிரதங்களின் இயக்கங்களுக்கான வேகநேரவரைபை ஒரேவரிப்படத்தில் வரைந்து அதில் இருந்து

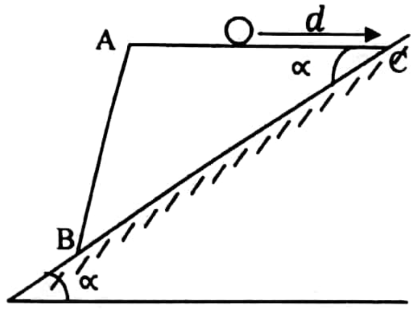
i. கடக்கும் கணத்தில் X, Y ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

ii. Y ஆனது X ஐ கடப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

iii. Y ஆனது X ஐ நிலையம் B இல் கடப்பின் AB ஐ காண்க.

(b) காற்று வ θ கி இலிருந்து v வேகத்துடன் வீசுகிறது. கிழக்கு நோக்கி u வேகத்துடன் செல்லும் காருக்கு காற்று வ α கிழக்கிலிருந்து வீசுவதாக தோன்றுகின்றது. $u + v\sin\theta = v\tan\alpha\cos\theta$ எனக் காட்டுக. மேற்கு நோக்கி u வேகத்துடன் செல்லும் காருக்கு காற்று வடக்கிற்கு β மேற்கிலிருந்து வீசுவதாககத் தோன்றுகிறது. $2\tan\theta = \tan\alpha - \tan\beta$ எனக் காட்டுக.

16)(a)



படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு ABC ஆனது 2m திணிவுடைய ஓர் ஒப்பமான ஆப்பின் திணிவு மையத்தின் ஊடான குறுக்குவெட்டுமுகம் ஆகும். முகம் BC ஆனது கிடையுடன் α சாய்வுள்ள ஒப்பமான சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு முகம் AC யின் மீது c யில் இருந்து d தூரத்தில் m திணிவுடைய ஓர் துணிக்கை வைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படும்.

i. ஆப்பு, துணிக்கை ஆகியவற்றின் ஆர்முடுகல்களை காண்பதற்கு பொருத்தமான சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

ii. துணிக்கையின் ஆப்பு சார்பான ஆர்முடுகலைக் காண்க.

iii. துணிக்கை மீது ஆப்பினால் ஏற்படும் மறுதாக்கம் $\frac{2\,mg}{2+3\,\tan^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

iv. துணிக்கை சாய்தளத்தை $\left(\frac{2d(2\cot\alpha + 3\tan\alpha)}{3g}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்னும் நேரத்தில் தொடும் எனக் காட்டுக.

(b) கிடைத்தரையில் உள்ள ஒருபுள்ளி O இற்கு மேலே h உயரத்தில் உள்ள ஒருபுள்ளியில் இருந்து $\sqrt{2\,ng}$ வேகத்தில் கிடையுடன் θ கோணத்தில் மேல் நோக்கி ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகிறது. எறியத்தளத்தில் O இன் ஊடான கிடைநிலைக்குத்து அச்சுக்களை முறையே x, y அச்சுக்களாகக் கொண்டு,

i. துணிக்கையின் பாதையின் சமன்பாடு $x^2\,tan^2\theta - 4n\,x\tan\theta + 4n(y-h) + x^2 = 0$

ii. துணிக்கை O இன் ஊடான கிடைத்தரையை O இல் இருந்து 2h தூரத்தில் அடிப்பதற்கு ஒரே ஒருஎறியற் கோணம் மாத்திரம் உண்டு எனில் $n = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}h$ எனக்காட்டி அவ் எறியல் கோணத்தைக் காண்க.

17) (a) O குறித்து AB ன் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{BC} = 2\,\underline{a}$ ஆகுமாறு C என்னும் புள்ளி உள்ளது. D, M என்பன முறையே BC, AB ன் நடுப்புள்ளிகள் நீட்டிய C M, OB யை N இல் சந்திக்கிறது.

i. O, M, D நேர்கோட்டு புள்ளிகள் எனக்காட்டுக.

ii. $ON = \lambda\, OB$ எனின் $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MC}$ என்பவற்றை $\lambda, \underline{a}, \underline{b}$ சார்பாகக் காண்க.

iii. $ON : NB$ யைக் காண்க.

(b) *ABCDEF* என்பது a m பக்கநீளமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணி *P, 3P, 2P, 4P, N* விசைகள், *BA, EB, DE, AD* வழியே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.

i. தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

ii. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டைக் காண்க.

iii. விளையுள் AD வழியேதாக்கச் செய்வதற்கு சேர்க்க வேண்டிய இணையை காண்க.

வடமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்துடன் இணைந்து
தொண்டைமானாறுவெளிக்களநிலையம் நடாத்தும்

Field Work Centre

FWC

தவணைப் பரீட்சை, யூலை - 2019

Term Examination, July - 2019

தரம் :- 12 (2020)	இணைந்த கணிதம் –A	மூன்று மணித்தியாலம் 10 நிமிடம்

சுட்டெண்						

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்குமாத்திரம் விடைஎழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி Bயிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி Bயை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்தகணிதம் I		
பகுதி	வினாஎண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் I	
இணைந்த கணிதம் II	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

பகுதி–A

01) x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களிற்கும் இருபடிச் சார்பு $f(x) = a^2(x^2+1) + 2abx - 2b(a-b)$ ஆனது மறையற்றது எனக் காட்டி $|a-b| = 2$ எனின் $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

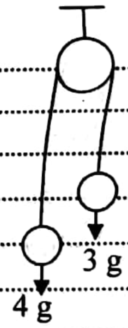
02) ஒரே வரிப்படத்தில் $y = 2|x-2| + 1, y = x + 1$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து சமனிலி $2|x-2| \leq x$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

03) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{(8+x)^{1/3} - 2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

04) ஒருவளையி C ஆனது $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ இற்கு $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta, y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ இனால் பரமான வடிவில் தரப்படுகின்றது. $\frac{dy}{dx} = \tan\frac{3\theta}{2}$ எனக் காட்டுக. தொடலிக் கோட்டின் படித்திறன் 1 ஆக இருக்குமாறு வளையி C மீது உள்ள புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

05) $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக.

06) தொகுதி இழை இறுக்கமாக இருக்க ஓய்விலிருந்து விடப்படின் தொகுதியின் ஆர்முடுகல், இழையிலுள்ள இழுவை என்பவற்றைக் காண்க.



07) ஒருபொருள் கிடைத்தளத்தில் $\propto$ சாய்வில் u வேகத்துடன் வீசப்படும் போது அடைந்த அதியுயர் உயரம் $\frac{u^2}{8g}$ எனின் அடைந்த கிடைவீச்சைக் காண்க.

08) ஒருதுணிக்கை $a\,ms^{-2}$ சீரான ஆர்முடுகளுடன் நேர்கோட்டில் இயங்குகிறது. n ஆம் செக்கனில் $x\,m$ தூரத்தையும் m ஆம் செக்கனில் $y\,m$ தூரத்தையும் செல்கிறது. $a = \frac{(y-x)}{(m-n)}$ எனக் காட்டுக.

09) $(\underline{a}-\underline{b}) \perp \underline{b}$ எனின் $\underline{a}\underline{b}$ க்கிடையிலான கோணம். $\cos^{-1}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$ எனக் காட்டுக.

10) A B என்பது $3l$ நீளமுள்ள சீரற்றகோல் அதன் திணிவுமையம் M. $AM : MB = 2 : 1$. கோலின் முனைகளில் தொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொன்றும் $\frac{5l}{2}$ நீளமுள்ள இரு இழைகளின் மறுமுனைகள் AB க்கு மேலுள்ள O என்ற புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில்

i) கோல் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் யாது?

ii) இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் கணிக்க.

G.C.E A/L Examination July - 2019

Field Work Centre

FWC

Grade - 12 (2020) **Combined Mathematics** **Marking Scheme**

1. $f(x) = a^2(x^2+1) + 2abx - 2b(a-b)$

$= a^2x^2 + 2abx + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$ (5)

$= (ax+b)^2 + (a-b)^2 \geq 0$ (5)

(5) $\left[\because (a-b)^2 \geq 0,\ (ax+b)^2 \geq 0\right]$

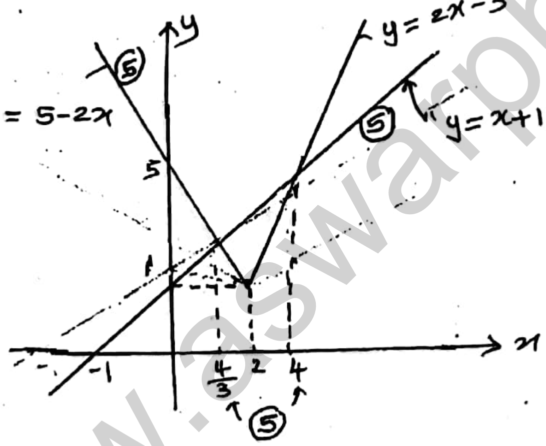
If $|a-b| = 2$, then $(a-b)^2 = 4$

$f(x) = (ax+b)^2 + 4$ (5)

$f(x)_{min} = 4$ $\left[\because (ax+b)^2 \geq 0\right]$ (5)

$\boxed{25}$

2.



$2|x-2| \leq x$ (5)

$2|x-2| + 1 \leq x + 1$

$\frac{4}{3} \leq x \leq 4$ (5)

$\boxed{25}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{(8+x)^{\frac{1}{3}} - 2}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{(8+x)^{\frac{1}{3}} - 2}{x}}$ (5)

$= \frac{3 \lim_{3x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{(8+x) \to 8} \frac{(8+x)^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{3}}}{(8+x) - 8}}$ (5)

$= \frac{3 \times 1}{\frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}}}$ (5) (5)

$= 36$ (5)

$\boxed{25}$

4. $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta$ (5)

$= 2(2)\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta$ (5)

$= 2(2)\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{4\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$ (5)

$= \tan\frac{3\theta}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \tan\frac{3\theta}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ (5)

$P \equiv \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ (5)

$\boxed{25}$

5. $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$ (5)

$\left[\because \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\right]$

$= \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$= \sin^2\frac{\pi}{8}\,\sin^2\frac{3\pi}{8}$ (5)

$= \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)$ (5)

$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (5)

$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{8}$ (5)

$\boxed{25}$

(6)

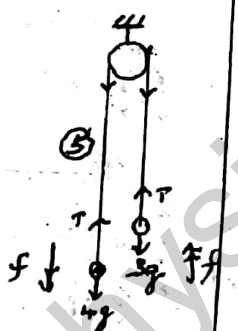
$4g - T = 4f$ (5)

$T - 3g = 3f$ (5)

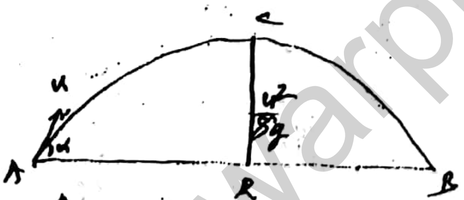
$f = \frac{g}{7}$ (5)

$T = 3g + 3\cdot\frac{g}{7}$

$= \frac{24}{7}g$ (5)



(7)



$A \to C \uparrow\ v^2 = u^2 + 2as$

$0 = (u\sin\alpha)^2 - 2gH$

$H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{8g}$ (10)

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

$A \to B$ $\uparrow\ s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$0 = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$

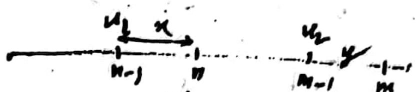
$t = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ (5)

$\to\ R = u\cos\alpha\cdot t$

$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

$= \frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$ (5)

(8)



$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$x = u_1\cdot 1 + \frac{1}{2}a\cdot 1^2$ (5)

$y = u_2\cdot 1 + \frac{1}{2}a\cdot 1^2$ (5)

$y - x = u_2 - u_1$ (5)

$v = u + at$

$u_2 = u_1 + a(m-n)$ (5)

$u_2 - u_1 = a(m-n)$

$\therefore y - x = a(m-n)$

$a = \frac{y-x}{m-n}$ (5)

(9) $(\underline{a} - \underline{b}) \perp \underline{b}$

$\Rightarrow \underline{b}\cdot(\underline{a}-\underline{b}) = 0$ (10)

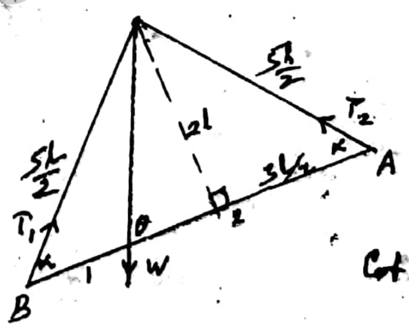
$\underline{b}\cdot\underline{a} - b^2 = 0$ (5)

$|\underline{b}||\underline{a}|\cos\theta - b^2 = 0$ (5)

$\cos\theta = \frac{|b|}{|a|}$ (5)

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$

(10)



$\cot\alpha = \frac{3}{4}$ (5)

$(2+1)\cot\theta = 2\cot\alpha - 1\cot\alpha$ (5)

$3\cot\theta = \frac{3}{4}$

$\cot\theta = \frac{1}{4}$

$\tan\theta = 4$ (5)

$A \curvearrowleft$ $T_1\cdot 3l\sin\alpha - W\cdot 2l\sin\theta = 0$ (5)

$T_1 = \frac{2W}{3}\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$

$= \frac{2}{3}W\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{5}{4}$

$= \frac{10}{3\sqrt{17}}W$

$B \curvearrowright$ $T_2\cdot 3l\sin\alpha - W\,l\sin\theta = 0$

$T_2 = \frac{5}{3\sqrt{17}}W$ (5)

11) Let $\alpha, \beta\ (\in \mathbb{R}^+)$ be the roots of equation $f(x) = x^2 - x + p = 0$

then $\alpha + \beta = +1$ 5

$\alpha\beta = p$ 5

Now $\dfrac{1}{(\alpha^2+1)} + \dfrac{1}{(\beta^2+1)} = \dfrac{(\beta^2+1)+(\alpha^2+1)}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}$

$= \dfrac{(\alpha^2+\beta^2)+2}{\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)+1}$ 5 $= \dfrac{1-2p+2}{p^2+1-2p+1}$ 5

$= \dfrac{3-2p}{(p-1)^2+1}$ 5

$\dfrac{1}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)} = \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$ 5

$= \dfrac{1}{p^2+1-2p+1}$

$= \dfrac{1}{(p-1)^2+1}$ 5

The required equation is

$x^2 - \left(\dfrac{1}{\alpha^2+1} + \dfrac{1}{\beta^2+1}\right)x + \dfrac{1}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)} = 0$

$x^2 - \dfrac{(3-2p)}{(p-1)^2+1}x + \dfrac{1}{(p-1)^2+1} = 0$ 10

5

$g(x) = ((p-1)^2+1)x^2 + (2p-3)x + 1 = 0$ $\boxed{45}$

The equation $g(x) = 0$ be the roots are different real roots

then $\Delta > 0$ 5

$(2p-3)^2 - 4((p-1)^2+1).1 > 0$ 5

5

$4p^2 - 12p + 9 - 4p^2 + 8p - 8 > 0$

5 $1 - 4p > 0$

$0 < p < \frac{1}{4}$ — ① but $\alpha\beta = p > 0$ 5 — ② $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$

①, ② $0 < p < \frac{1}{4}$ — 5

$\boxed{30}$

$g(x) = 0$ has same real roots

5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2+1} = \dfrac{1}{\beta^2+1}$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = \beta^2 + 1$ 5

$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$ 5

$\Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+)$

5

$f(x) = 0$ has same real root $\boxed{20}$

b) $(x+1)$ is a factor of $g(x)$

$g(-1) = 0$ 5 & $g(x) = x^3 + px^2 + qx - 2$

$g(-1) = -1 + p - q - 2 = 0$

5

$p - q = 3$ — ①

5

$g(1)$ is a remainder when $g(x)$ is divided by $(x-1)$

$g(2)$ is a remainder when $g(x)$ is dividede by $(x-2)$

$g(2) = 2g(1)$ 5

$8 + 4p + 2q - 2 = 2 + 2p + 2q - 4$ 5

5

$2p = -8$

$p = -4$

5

① $\Rightarrow$ $q = -7$ 5

$g(x) = x^3 - 4x^2 - 7x - 2$ $\boxed{40}$

$f(x) = (x+2)g(x) + 5$ 5

$f(x) = (x+2)(x^3 - 4x^2 - 7x - 2) + 5$ 5

$= x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 16x + 1$ 5

$\boxed{15}$

13

12.

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(1) - (x+1)2(x-2)}{(x-2)^4}$ (10)

$= \dfrac{x-2-2x-2}{(x-2)^3}$ (5)

$= -\dfrac{x+4}{(x-2)^3}$

$f''(x) = -\left\{\dfrac{(x-2)^3(1) - (x+4)3(x-2)^2}{(x-2)}\right\}$ (10)

$= -\left\{\dfrac{x-2-3x-12}{(x-2)^4}\right\}$ (5)

$= \dfrac{2(x+7)}{(x-2)^4}$

When $x=0$, $y=\frac{1}{4}$

When $y=0$, $x=-1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$

Vertical asymptote: $x=2$ (5)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{(1-\frac{2}{x})^2} = 0$

Horizontal asymptote: $y=0$ (5)

When $f'(x)=0$, $x=-4$ (5)

$x<-4$	$-4<x<2$	$x>2$
$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$
Decreasing	increasing	decreasing
(5)	(5)	(5)

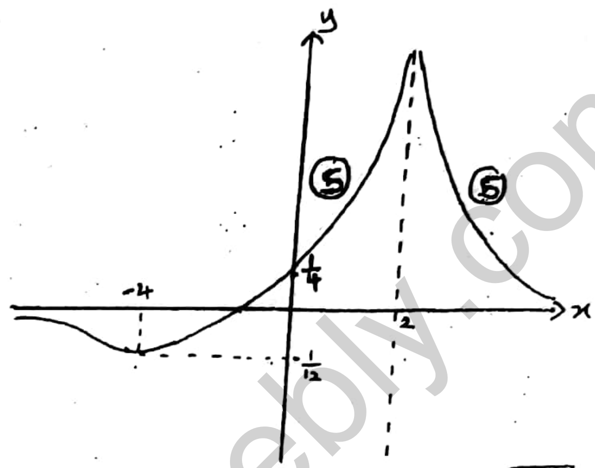
$(-4, -\frac{1}{12})$ is a local minimum (5)

When $f''(x)=0$, $x=-7$ (5)

$x<-7$	$-7<x<2$	$x>2$
$f''(x)<0$	$f''(x)>0$	$f''(x)>0$
concave down	concave up	concave up
(5)	(5)	(5)

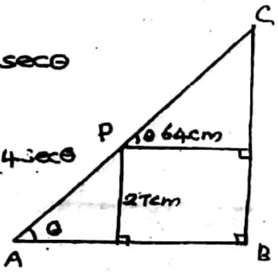
When $x=-7$, $y=-\frac{2}{27}$

$(-7, -\frac{2}{27})$ is a point of inflection (5) $\boxed{90}$



$\boxed{10}$

(b)



$AC = 27\csc\theta + 64\sec\theta$

Let $AC = l$

Then $l = 27\csc\theta + 64\sec\theta$ (10)

$\dfrac{dl}{d\theta} = -27\csc\theta\cot\theta + 64\sec\theta\tan\theta$ (10)

$= 64\csc\theta\cot\theta\left(\tan^3\theta - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)$

$\dfrac{dl}{d\theta} = 0 \Rightarrow \tan^3\theta = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ (5)

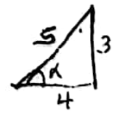
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$ (say) (5)

$0<\theta<\alpha$	$\theta=\alpha$	$\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$
$\frac{dl}{d\theta}<0$	$\frac{dl}{d\theta}=0$	$\frac{dl}{d\theta}>0$

(10)

$\therefore$ l is minimum when $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (5)

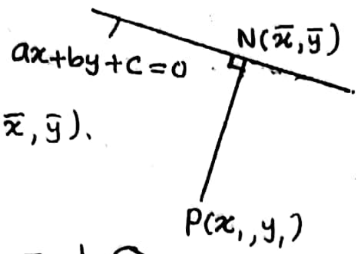


$(l)_{min} = 27\csc\alpha + 64\sec\alpha$

$= 27\left(\frac{5}{3}\right) + 64\left(\frac{5}{4}\right)$

$= 125$ cm (5) $\boxed{50}$

13.



Let $N \equiv (\bar{x},\bar{y})$.

Then

$$\frac{\bar{y}-y_1}{\bar{x}-x_1} \times -\frac{a}{b} = -1 \quad 5$$

$$\frac{\bar{y}-y_1}{b} = \frac{\bar{x}-x_1}{a} = t \text{ (say)} \quad 5$$

$$\bar{x} = x_1 + at, \quad \bar{y} = y_1 + bt \quad 5$$

$N(\bar{x},\bar{y})$ lies on $ax+by+c=0$

$$a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0 \quad 5$$

$$t = -\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \quad 5$$

$$PN = \sqrt{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{y}-y_1)^2} \quad 5$$

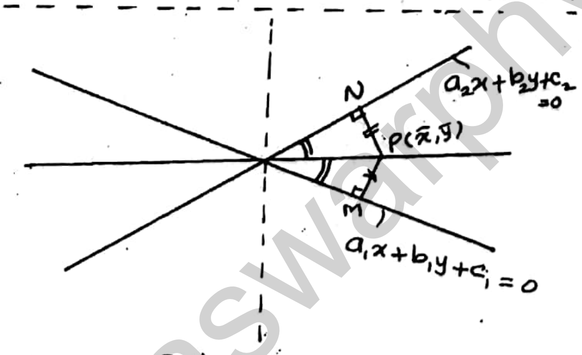
$$= \sqrt{a^2t^2+b^2t^2}$$

$$= |t|\sqrt{a^2+b^2} \quad 5$$

$$= \frac{|ax_1+by_1+c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad 5$$

$\boxed{40}$



$$PM = PN$$

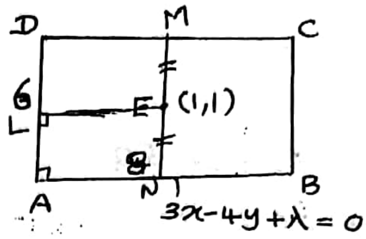
$$\frac{|a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad 10$$

$$\frac{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad 5$$

Let $\bar{x} \equiv x$, $\bar{y} \equiv y$ 5

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$\boxed{20}$



(i)

AB: $3x-4y+\lambda=0$

$EN = 3$

$$\frac{|3(1)-4(1)+\lambda|}{5} = 3 \quad 10$$

$$|\lambda-1| = 15 \quad 5$$

$$\lambda = 16 \text{ or } \lambda = -14 \quad 10$$

$$\lambda>0 \Rightarrow \lambda = 16 \quad 5$$

$\boxed{30}$

AB: $3x-4y+16=0$

(ii) DC: $3x-4y-14=0$ 5 $\boxed{05}$

(iii) AD: $4x+3y+\mu=0$

$EL = 4$

$$\frac{|4(1)+3(1)+\mu|}{5} = 4 \quad 10$$

$$|\mu+7| = 20 \quad 5$$

$$\mu = 13 \text{ or } \mu = -27 \quad 10$$

$$\mu>0 \Rightarrow \mu = 13 \quad 5$$

AD: $4x+3y+13=0$ $\boxed{30}$

(iv) $$\frac{3x-4y+16}{5} = \pm\frac{4x+3y+13}{5} \quad 10$$

$$3x-4y+16 = \pm(4x+3y+13) \quad 5$$

$$(+) \Rightarrow x+7y-3=0 \quad 5$$

$$(-) \Rightarrow 7x-y+29=0 \quad 5$$

$\boxed{25}$

14. a) (i) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta = 0$

$\cos\theta + \cos 5\theta + \cos 3\theta = 0$

$2\cos 3\theta \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ (5)

$\cos 3\theta \{2\cos 2\theta + 1\} = 0$ (5)

$\cos 3\theta = 0$ or $2\cos 2\theta + 1 = 0$

$\cos 3\theta = \cos\frac{\pi}{2}$ (5) $\qquad \cos 2\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$ (5)

$3\theta = 2n_1\pi \pm \frac{\pi}{2}$ $\qquad 2\theta = 2n_2\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\theta = \frac{2n_1\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$ (5) $\quad n_1 \in \mathbb{Z}$ $\qquad \theta = n_2\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (5) $\quad n_2 \in \mathbb{Z}$

$\boxed{30}$

(ii) $\sqrt{3}(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \cos 2\theta$

$\sqrt{3}(1 + \sin 2\theta) = \cos 2\theta$ (5)

$\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta = \sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)

$\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\theta - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2\theta = \cos\frac{\pi}{6}$ (5)

$\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$ (5)

$2\theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (5) $\quad n \in \mathbb{Z}$

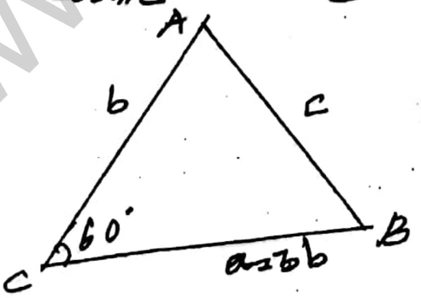
$2\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$

$\theta = n\pi - \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{12}$ (5)

$\theta = n\pi - \frac{\pi}{12}$ or $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \boxed{30}$

b) Sine rule (5)

Cosine rule (5)



In triangle by cosine rule (15)

$c^2 = b^2 + (3b)^2 - 2b(3b)\cos 60°$ (10)

$c^2 = b^2 + 9b^2 - 3b^2$

$c^2 = 7b^2$

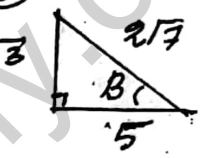
$c = \sqrt{7}\,b$ (5)

by sine rule

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin 60°}{\sqrt{7}\,b}$ (10)

$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ (5)

$\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$ $\left(\because 0 < B < \frac{\pi}{2}\right)$ (5)



$A + B + C = 180°$

$A + B = 120° \quad C = 60°$

$\tan(A+B) = \tan 120°$ (5)

$$\frac{\tan A + \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \tan A\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)} = -\sqrt{3} \quad (5)$$

$\tan A = -3\sqrt{3}$ (5) $\qquad \boxed{60}$

c) $\cos 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$
$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (say)

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \quad (5)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{49}}{1 + \frac{1}{49}} = \frac{24}{25} \quad (5)$$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta$

$$= 2\left\{\frac{2\tan\beta}{1 + \tan^2\beta}\right\}\left\{\frac{1 - \tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}\right\} \quad (5)$$

$$= 2\left\{\frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{9}}\right\}\left\{\frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}}\right\} \quad (5)$$

$$= 2 \times \frac{6}{10} \times \frac{8}{10}$$

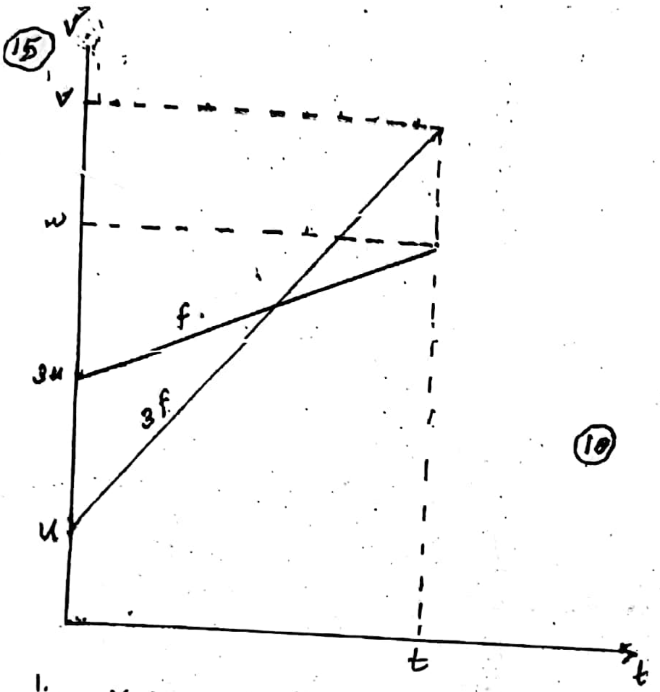
$$= \frac{24}{25} \quad (5)$$

$\therefore \cos 2\alpha = \sin 4\beta$

$\cos 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$ (5)

$\boxed{30}$

(15)



(10)

i. $t = \frac{v-u}{3f} = \frac{w-3u}{f}$ (10)

$3w - v = 8u$ —— (1) (5)

$\frac{1}{2}(v+u)\cdot t = \frac{1}{2}(w+3u)\cdot t$ (10)

$\Rightarrow v - w = 2u$ —— (2) (5)

$w = 5u$ (5)

$v = 7u$ (5)

ii. $t = \frac{7u-u}{3f} = \frac{2u}{f}$ (10)

iii. $AB = \frac{1}{2}(v+u)t$ (10)

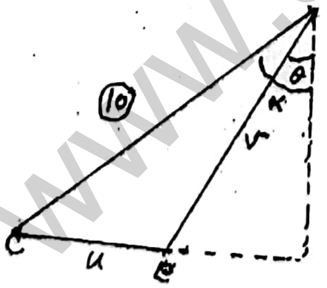
$= \frac{1}{2}\cdot 8u \cdot \frac{2u}{f}$

$= \frac{8u^2}{f}$ (10)

b) V_{WE} $\angle\theta$ v $\quad V_{CE} \xrightarrow{u}$ $\quad V_{WC}$ $\angle\alpha$ (10)

$V_{CE} \xleftarrow{u}$ $\quad V_{WC}$ $\angle\beta$

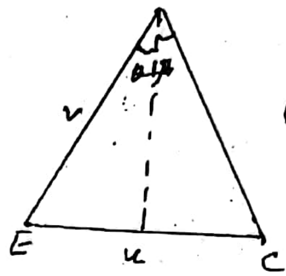
(10)



$V_{WC} = V_{WE} + V_{EC}$ (10)

$\tan\alpha = \frac{u + v\sin\theta}{v\cos\theta}$ (10)

$= \frac{u}{v\cos\theta} + \tan\theta$ (10)



(10)

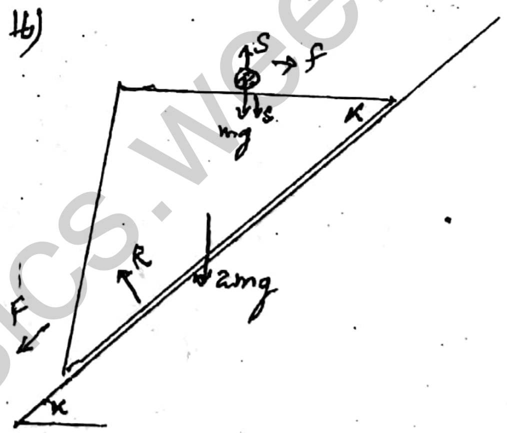
$\tan\beta = \frac{u - v\sin\theta}{v\cos\theta}$ (10)

$= \frac{u}{v\cos\theta} - \tan\theta$

$= \tan\alpha - \tan\theta - \tan\theta$

$2\tan\theta = \tan\alpha - \tan\beta$

16 b)



for the system $\swarrow F = ma$

$2mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = 2mF + m(F - f\cos\alpha)$ (15)

$3g\sin\alpha = 3F - f\cos\alpha$ —— (1)

for m $\rightarrow$ $0 = m(f - F\cos\alpha)$ (15)

$f = F\cos\alpha$ —— (2)

$F = \frac{3g\sin\alpha}{3 - \cos^2\alpha} = \frac{3g\sin\alpha}{2 + \sin^2\alpha}$ (10)

$f = \frac{3g\sin\alpha\cos\alpha}{2 + \sin^2\alpha}$

$= \frac{3g\tan\alpha}{2 + 3\tan^2\alpha}$ (10)

for m $\uparrow$ $S - mg = m(-F\sin\alpha)$ (10)

$S = mg - \frac{3mg\sin^2\alpha}{2 + \sin^2\alpha}$

$= \frac{2mg\cos^2\alpha}{2 + \sin^2\alpha}$

$= \frac{2mg}{2 + 3\tan^2\alpha}$ (5)

for m related to wedge $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$d = 0 + \frac{1}{2} f t^2$

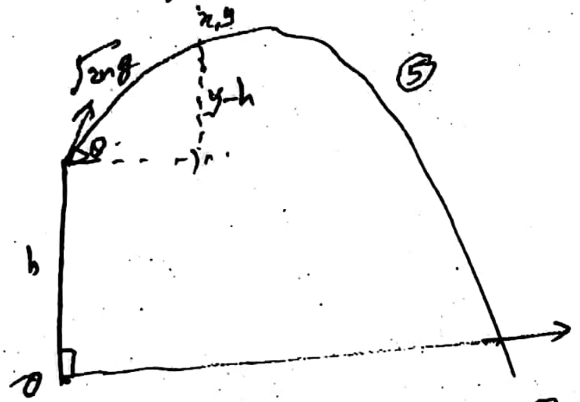
$t^2 = \frac{2d}{f}$ (10)

$= \frac{2d(2+3\tan^2\alpha)}{3g\tan\alpha}$

$= \frac{2d}{3g}\left[2\cot\alpha + 3\tan\alpha\right]$ (5)

$t = \left[\frac{2d}{3g}(2\cot\alpha+3\tan\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}$

b)



(5)

$\rightarrow x = \sqrt{2ng}\cos\theta \cdot t$ ——— (1) (10)

$\uparrow y - h = \sqrt{2ng}\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ (10)

$= x\tan\theta - \frac{gx^2}{2\times 2ng\cos^2\theta}$

$y - h = x\tan\theta - \frac{x^2}{4n}(1+\tan^2\theta)$ (10)

$x^2\tan^2\theta - 4nx\tan\theta + 4n(y-h) + x^2 = 0$

ii $x = 2h$, $y = 0$ (5)

$4h^2\tan^2\theta - 8hn\tan\theta - 4nh + 4h^2 = 0$ (10)

for a single elevation $\Delta = 0$ } (10)

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{n}{h}$

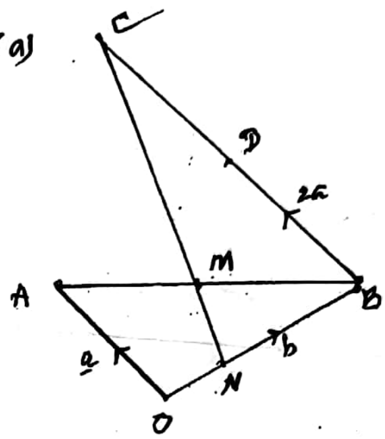
or $64h^2n^2 - 4\cdot 4h^2(4h^2 - 4nh) = 0$ (10)

$n^2 + nh - h^2 = 0$

$n = \frac{-h \pm \sqrt{h^2+4h^2}}{2}$

$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)h$ $(n>0)$

17 a)



$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$

$= a + \frac{1}{2}(b-a)$

$= \frac{1}{2}(a+b)$ (10)

$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$

$= b + a$ (10)

$= 2\vec{OM}$ (10)

$\Rightarrow$ O, M, D collinear.

$\vec{ON} = \lambda b$

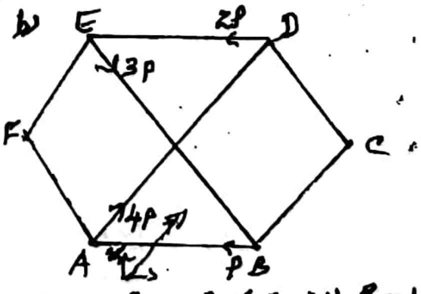
$\vec{NM} = -\lambda b + \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + (\frac{1}{2}-\lambda)b$ (10)

$\vec{MC} = \frac{1}{2}(b-a) + 2a = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b$ (10)

$NM \parallel MC \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-\lambda}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (10)

ON : NB = 1 : 2.

b)



$\rightarrow X = -P - 2P + (4P+3P)\cos 60$ (10)

$= \frac{P}{2}$ (5)

$\uparrow Y = (4P-3P)\sin 60$ (10)

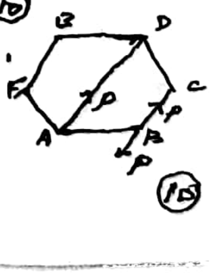
$= \frac{P\sqrt{3}}{2}$ (5)

$R = P$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\theta = 60^\circ$ (15)

A) $2P \cdot 2a\cos 30 - 3P a\sin 60 = x \frac{P\sqrt{3}}{2}$ (10)

$x = a$ (5)

Resultant acts along BC. (10)



$G' = P \cdot a\sin 60$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}aP$ (10)

(15)