அந்தரங்கமானது

NEW/OLD

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த. (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம் I

புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காகத் தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துகளுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப் பதிப்புரிமையுடையது

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம்

(புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்)

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பகுதி I

பகுதி A	10 × 25	=	250
பகுதி B	05 × 150	=	750
மொத்தம்		=	1000/10
வினாத்தாள் I மொத்தப் புள்ளி		=	100

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ △ $\frac{4}{5}$
....
....

(ii) .... ✓ △ $\frac{3}{5}$
....
....

(iii) .... ✓ △ $\frac{3}{5}$
....
....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடபட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

ooo

புதிய பாடத்திட்டம்

1. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ என நிறுவுக.**

$n = 1$ இற்கு இ. கை.ப. = 4 + 1 = 5, வ.கை.ப. = 1 (2 + 3) = 5

$\therefore n = 1$ இற்குப் பேறு உண்மையானது (5)

யாதாயினும் $k \in \mathbb{Z}^+$ ஐ எடுத்து $n = k$ இற்குப் பேறு உண்மையானதெனக் கொள்வோம்.

அ - து. $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = k(2k+3)$ (5)

இப்போது $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = \sum_{r=1}^{k}(4r+1) + \{4(k+1)+1\}$

$= k(2k+3) + (4k+5)$ (5)

$= 2k^2 + 7k + 5$

$= (k+1)(2k+5)$ (5)

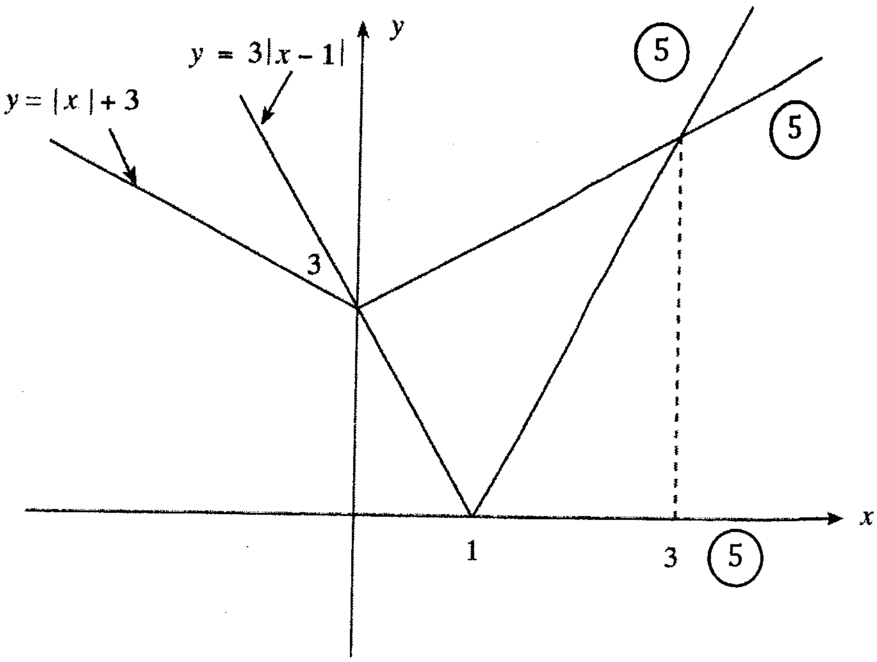
$= (k+1[2(k+1)+3])$

இதிலிருந்து, $n = k$ இற்குப் பேறு உண்மையானதெனின், $n = k + 1$ இற்கும் பேறு உண்மையாகும். $n = 1$ இற்குப் பேறு உண்மையானதென நாம் ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளோம்.

இதிலிருந்து, கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டிற்கேற்ப எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் பேறு உண்மை யானதாகும். (5)

25

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = 3|x-1|$, $y = |x| + 3$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக.
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $3|2x-1| > 2|x| + 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



ஒரு வெட்டுப் புள்ளியின் x ஆள்கூறு $x = 0$ ஆகும். மற்றைய வெட்டுப் புள்ளியின் x - ஆள்கூறு $x>1$ இற்கு $3(x-1) = x+3$ இனால் தரப்படுகின்றது.

இதிலிருந்து $x = 3$.

இப்போது $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow 3|u-1| > |u| + 3$ இங்கு $u = 2x$ (5)

$\Leftrightarrow u < 0$ அல்லது $u > 3$ (வரைபுகளுக்கேற்ப)

$\Leftrightarrow x < 0$ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ (5)

25

மாற்று முறை 1

முன்னர் போன்று வரைபுகளுக்கு (5) + (5)

X இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு மாற்று முறை

சந்தர்ப்பம் (i) $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow 3(2x-1) > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் $x > \frac{3}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும்.

சந்தர்ப்பம் (ii) $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 8x$$
$$\Leftrightarrow 0 > x$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் இல்லை.

சந்தர்ப்பம் (iii) $\boxed{x < 0}$

சரியான தீர்வுகளுடன் 3 சந்தர்ப்பங்களுக்கும் (10)
சரியான தீர்வுகளுடன் 2 சந்தர்ப்பங்களுக்கு மாத்திரம் (5)

அப்போது $3|2x-1| > 2|x|+3 \Leftrightarrow 6x+3 > -2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$
$$\Leftrightarrow x < 0$$

இதிலிருந்து, இச்சந்தர்ப்பத்தில் தீர்வுகள் $X<0$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும்.

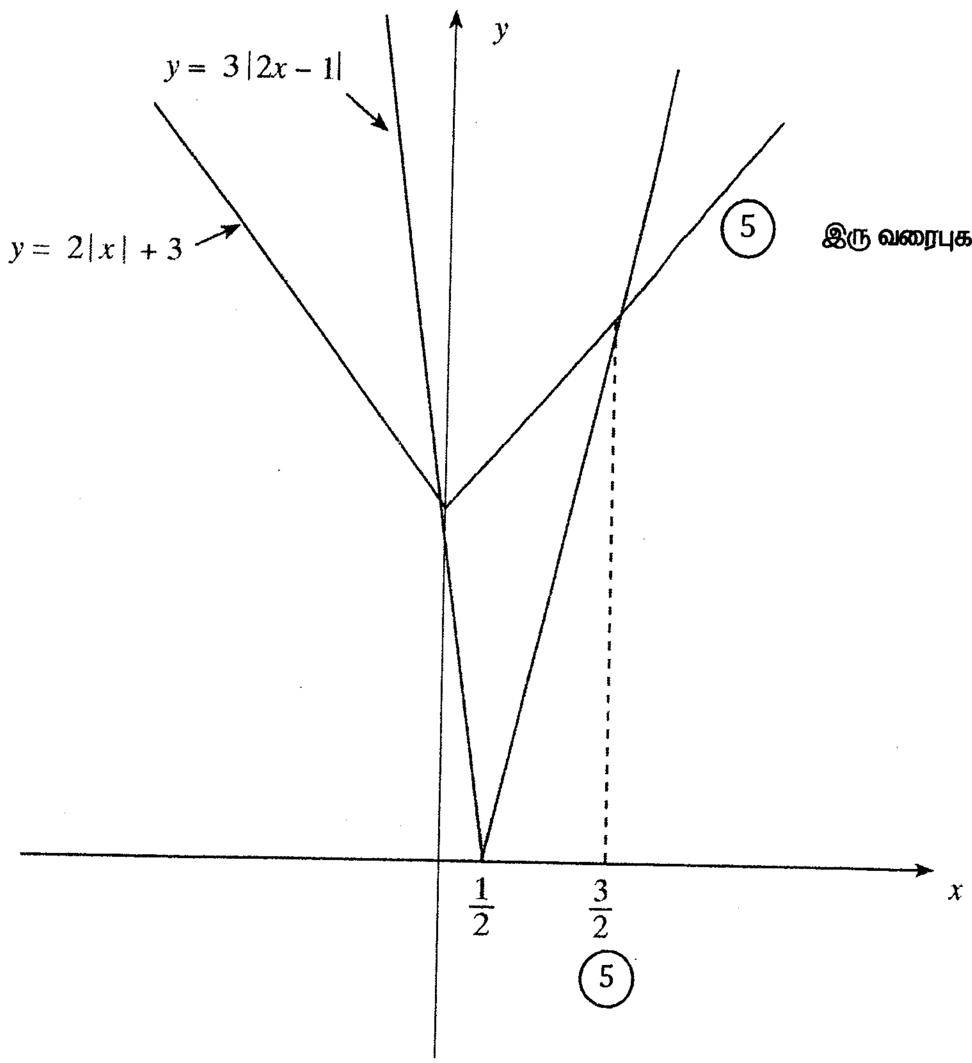
$\therefore$ தரப்பட்டுள்ள சமனிலியின் தீர்வுகள் $X<0$ ஐ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் X இன் பெறுமானங்களாகும். (5)

25

மாற்று முறை 2

முன்னர் போன்று வரைபுகளுக்கு (5) + (5)

x இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு மாற்று முறை :



வரைபுகளிலிருந்து

$3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow x < 0$ அல்லது $x > \frac{3}{2}$ (5)

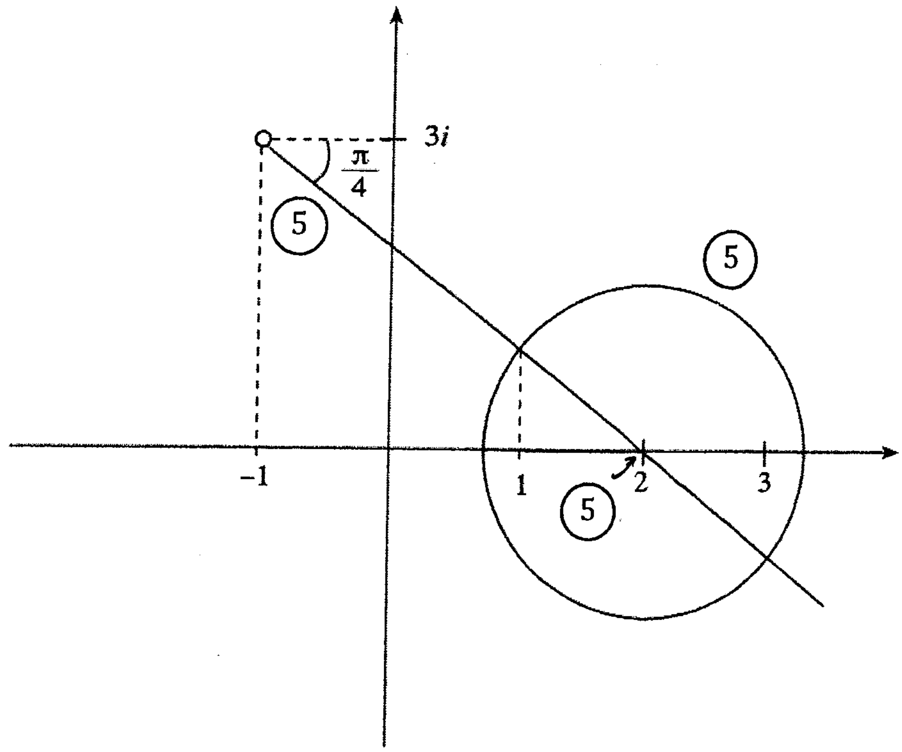
3. ஒரே ஆகண் வரிப்படத்தில்

(i) $\text{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$,

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

என்பவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்குகளைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, இவ்வொழுக்குகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்களை எழுதுக.



தேவையான சிக்கல் எண்கள் $1 + i$ (5) , $3 - i$ (5) ஆகும்.

25

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ எனக் கொள்வோம். $(1+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரியை x இன் வலுக்களின் ஏறுவரிசையில் எழுதுக. மேலே தரப்பட்ட விரியில் இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமன் எனின், n ஒற்றையானது எனக் காட்டுக.

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$; இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$; $r = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n$ அத்துடன் ${}^nC_0 = 1$ (5)

இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளை ${}^nC_r, {}^nC_{r+1}$ என எடுக்கலாம்.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$ (5) யாதாயினும் $r \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ இற்கு

$\Leftrightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$ (5)

$\Leftrightarrow \frac{n}{n-r} = \frac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n-r = r+1$

$\Leftrightarrow n = 2r+1$ (5)

$\therefore n$ ஒற்றையானது.

25

மாற்று முறை

இரு அடுத்துள்ள உறுப்புகளை ${}^nC_{r-1}, {}^nC_r$ என எடுக்கலாம்.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$ (5) யாதாயினும் $r \in \{1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n\}$ இற்கு

$\Leftrightarrow \frac{n!}{[n-(r-1)]!(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ (5)

$\Leftrightarrow \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n-r+1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r-1$ (5)

$\therefore$ n ஒற்றையானது.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ **எனக் காட்டுக.**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)} \quad (5)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{(3x-\pi)}.\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right) \quad (5)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}.\ \left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\right) \quad (5)$$

(5)

$$=\frac{1}{3}.1.2\sqrt{\pi}=\frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad (5)$$

25

மாற்று முறை

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \times \frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right]\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(5) (5)

$$= \left[\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad (5)$$

25

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$, $y = 0$ என்னும் வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x–அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ எனக் காட்டுக.

தேவையான கனவளவு

$$= \pi \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\, dx \quad (5)$$

correct limits needed

$$= \pi \int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du \quad ; \text{ இங்கு } u = 1 + e^x \quad (5)$$

$$= \pi \int_2^4 \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right\} du \quad (5)$$

$$= \pi \left\{ \ln|u| + \frac{1}{u} \right\} \Big|_2^4 \quad (5)$$

with or without modulus

$$= \pi \left\{ \ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right\}$$

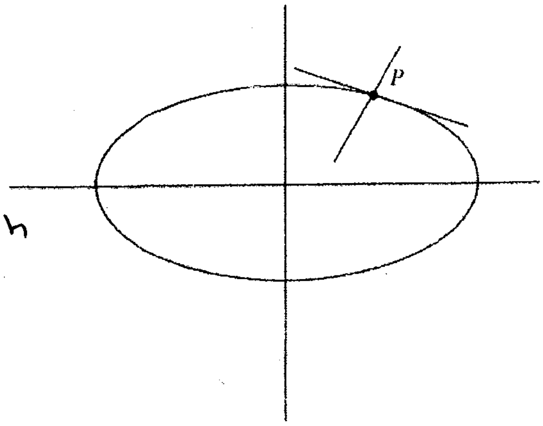
$$= \frac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\} \quad (5)$$

25

7. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ இற்கு அதன் மீது இருக்கும் புள்ளி $P\equiv(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ இல் உள்ள செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $5\sin\theta\, x-3\cos\theta\, y=16\sin\theta\cos\theta$ எனக் காட்டுக.

மேலே தரப்பட்ட நீள்வளையத்திற்கு அதன் மீது உள்ள புள்ளி $\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ இல் வரையப்பட்ட செவ்வன் கோட்டின் y−வெட்டுத்துண்டைக் காண்க.

$x=5\cos\theta,\ \ y=3\sin\theta$



$\frac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta,\ \ \frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$ (5)

for both

$$\frac{dx}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$$ (5) இற்கு $\sin\theta\neq 0$

$\therefore\ \cos\theta\neq 0$ இற்கு P இல் வரையப்பட்டுள்ள செவ்வனின் படித்திறன் $=\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$ (5)

தேவையான சமன்பாடு $\cos\theta\neq 0$ இற்கு $y-3\sin\theta=\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x-5\cos\theta)$ (5) ஆகும்.

$5\sin\theta x-3\cos\theta y=16\sin\theta\ \ \cos\theta$

work leading to the answer

$\cos\theta=0$ ஆக இருக்கும்போதும் இச்சமன்பாடு வலிதாகும் (Pஆனது y - அச்சு மீது இருக்கும்போது)

y - வெட்டுத்துண்டிற்கு $y-\frac{16}{3}\sin\theta$

ஆனால் $3\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\ \theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

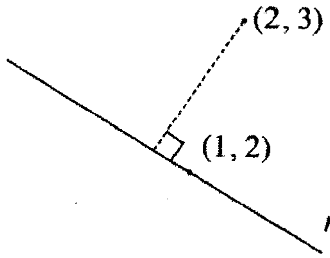
$\therefore y=-\frac{8}{\sqrt{3}}.$ (5)

$\therefore$ தேவையான y வெட்டுத்துண்டு $\left(0,-\frac{8}{\sqrt{3}}\right).$

25

8. $m \in \mathbb{R}$ எனவும் l ஆனது புள்ளி $A \equiv (1, 2)$ இனூடாகச் செல்லும் படித்திறன் m ஐக் கொண்ட நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். l இன் சமன்பாட்டை m இல் எழுதுக.

புள்ளி $B \equiv (2, 3)$ இலிருந்து கோடு l இற்குச் செங்குத்துத் தூரம் $\frac{1}{\sqrt{5}}$ அலகுகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. m இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.



l இன் சமன்பாடு $y-2=m(x-1)$

அ-து $y-mx-2+m=0$ (5)

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{|3-2m-2+m|}{\sqrt{1+m^2}} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 1+m^2=5(1-m)^2 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow 1+m^2=5(1-2m+m^2)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-10m+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2=0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)(m-2)=0$$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ அல்லது $m=2$ (5)

25

9. புள்ளி $(-2, 0)$ இல் மையத்தைக் கொண்டதும் புள்ளி $(-1, \sqrt{3})$ இனூடாகச் செல்வதுமான வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளி $A \equiv (1, -1)$ இலிருந்து வட்டம் S இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

இதிலிருந்து, A இலிருந்து S இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளின் $x-$ ஆள்கூறுகள் சமன்பாடு $5x^2 + 8x + 2 = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன எனக் காட்டுக.

$S : (x+2)^2 + y^2 = r^2$ (5)

இது $(-1, \sqrt{3})$ இனூடாகச் செல்கின்றது.

$\therefore 1 + 3 = r^2$

$\therefore 4 = r^2$

இலிருந்து, S இன் சமன்பாடு $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ஆகும். (5)

அ - து $x^2 + y^2 + 4x = 0$

$A \equiv (1-1)$ இலிருந்து S இற்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலிகளின் தொடுகை நாண் $x - y + 2(x+1) = 0$ ஆகும். (5)

அ - து $3x - y + 2 = 0$

தொடுகைப் புள்ளிகளுக்காக $y = 3x + 2$ (1) இற் பிரதியிடுவோம். (5)

அப்போது $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0$

இதிலிருந்து, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0.$ ஆகவே $5x^2 + 8x + 2 = 0$ (5)

25

10. $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ எனக் கொள்வோம்.

சர்வசமன்பாடு $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ஐப் பயன்படுத்தி, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ எனக் காட்டுக.

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ எனக் காட்டுக.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ .... (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ஆனது $\cos^2\theta \neq 0$ ஐத் தருகின்றது.

இதிலிருந்து, (1) இனின்றும் $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (5)

இப்போது $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ இலிருந்து $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ கிடைக்கின்றது. (5)

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ ஆகையால், $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ $\quad \therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$ (5)

25

11. (*a*) $f(x) = x^2 + px + c$, $g(x) = 2x^2 + qx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ உம் $c > 0$ உம் ஆகும்.
$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ஆகியன ஒரு பொது மூலம் α ஐக் கொண்டுள்ளன எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\alpha = p - q$ எனக் காட்டுக.
c ஐ p, q ஆகியவற்றில் கண்டு,
(i) $p > 0$ எனின் $p < q < 2p$ எனவும்
(ii) $f(x) = 0$ இன் பிரித்துக்காட்டி $(3p - 2q)^2$ எனவும்
உய்த்தறிக.
$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ ஆகியவற்றின் மற்றைய மூலங்கள் முறையே β, γ எனக் கொள்வோம். $\beta = 2\gamma$ எனக் காட்டுக.
மேலும் β, γ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.
(*b*) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $h(x)$ இன் ஒரு காரணி $x^2 - 1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $b = -1$ எனக் காட்டுக.
மேலும் $h(x)$ ஆனது $x^2 - 2x$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $5x + k$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $k \in \mathbb{R}$ ஆகும். k இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, $h(x)$ ஐ வடிவம் $(x - \lambda)^2(x - \mu)$ இல் எழுதலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α ஆனது $f(x) = 0, g(x) = 0$ ஆகியவற்றின் ஒரு பொது மூலம் ஆகையால்,

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ ------ (1) (5)

$2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ (5)

$\therefore \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ ஆகவே, $\alpha\left[\alpha - (p - q)\right] = 0$ (5)

இதிலிருந்து, $\alpha = p - q$ (5) $(\because c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

20

(1) $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ (5)

$= -(p - q)(2p - q)$ (5) (α இற்குப் பிரதியிடும்போது)

$= -(p - q)(q - 2p)$

10

(i) $c > 0$ ஆகையால் $(q - p)(q - 2p) < 0$ (5)

$\therefore q$ ஆனது p இற்கும் $2p$ இற்குமிடையே இருக்கிறது.

$p > 0$ எனின், $p < 2p$ ஆகையால், $p < q < 2p$ (5)

numberline method is correct

10

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ (5)

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ (5)

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ (5)

15

$\alpha + \beta = -p$ (5)

$\alpha + \gamma = -\frac{q}{2}$ (5)

$\therefore \beta - 2y = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0$ (5)

$\therefore \beta = 2\gamma$

மாற்று முறை

$\alpha\beta = c$ (5)

$\alpha r = \frac{c}{2}$ (5)

$\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ஆகையால்

$\frac{\beta}{\gamma} = 2$ (5)

$\beta = 2\gamma$

15

தேவையான சமன்பாடு $(x-\beta)(x-\gamma) = 0$ ஆகும். (5)

இதிலிருந்து $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ ~~(10)~~ (5) } no need

மேலும் $\beta + \gamma = -p - \frac{q}{2} - 2\alpha = -p - \frac{q}{2} - (2p-2q) = \frac{3}{2}(q-2p)$ (05)

இப்போது $\alpha^2\beta\gamma = \frac{c^2}{2}$

$\therefore \beta\gamma = \frac{c^2}{2(p-q)^2} = \frac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \frac{1}{2}(q-2p)^2$ (05)

$x^2 - \frac{3}{2}(q-2p)x + \frac{1}{2}(q-2p)^2 = 0$ (05)

$2x^2 + 3(2p-q)x + (2p-q)^2 = 0$ (+10)

25

(b) $(x^2 - 1)$ ஆனது $h(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகையால்,

$(x - 1)$, $(x + 1)$ ஆகிய இரண்டும் $h(x)$ இன் காரணிகளாகும்.

for both

காரணித் தேற்றத்திற்கேற்ப $h(1) = 0, h(-1) = 0$ ஆகும். (05)

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ (1) (05) $\therefore h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— (2) (05)

(1) - (2) இன் மூலம் $2 + 2b = 0$

$\therefore b = -1$ (5)

20

$h(x) = p(x).(x^2 - 2x) + 5x + k$ (05)

$h(0) = k$ (05)

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ (05)

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ (05)

(1) + (2) இன் மூலம் $a = -c$

$\therefore c = -1$

இதிலிருந்து, $k = -1$ (5)

25

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)(x^2 - 1)$ (05)

$= (x+1)^2(x-1)$ (05)

$(\gamma = -1, \ \mu = 1)$ ← not necessary to mentioned

10

---

12. (*a*) ஐந்து பியானோ வாசிப்பவர்கள், ஐந்து கிதார் வாசிப்பவர்கள், மூன்று பெண் பாடகர்கள், ஏழு ஆண் பாடகர்கள் ஆகியோரிலிருந்து **செப்பமாக** இரு பியானோ வாசிப்பவர்களும் **குறைந்தபட்சம்** நான்கு கிதார் வாசிப்பவர்களும் இடம்பெறுமாறு பதினொரு உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஓர் இசைக் குழுவைத் தெரிவுசெய்ய வேண்டியுள்ளது. அத்தகைய எத்தனை வெவ்வேறு இசைக் குழுக்கள் தெரிவுசெய்யப்பட முடியுமெனக் காண்க.

இவற்றுள் செப்பமாக இரு பெண் பாடகர்களைக் கொண்டிருக்கும் இசைக் குழுக்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$, $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $A, B \in \mathbb{R}$.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகிறதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இப்போது $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ எனக் கொள்வோம். $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ ஒருங்குகிறதென **உய்த்தறிந்து**, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a) P = பியானோ வாசிப்பவர்கள் (5), G = கிதார் வாசிப்பவர்கள் (5), பாடகர்கள் (10)

FS = பெண் பாடகர்கள் (3)

MS = ஆண் பாடகர்கள் (7)

P	G	S	வழிகளின் எண்ணிக்கை
2	4	5	(10) /10 $^5C_2\ ^5C_4\ ^{10}C_5 = 12600$ (05)
2	5	4	(10) /10 $^5C_2\ ^5C_5\ ^{10}C_4 = 2100$ (05)

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= 12600 + 2100$

$= 14700$ (05)

35

P	G	FS	MS	வழிகளின் எண்ணிக்கை
2	4	2	3	${}^5C_2\ {}^5C_4\ {}^3C_2\ {}^7C_3 = 5250$ (05) (10)
2	5	2	2	${}^5C_2\ {}^5C_5\ {}^3C_2\ {}^7C_2 = 630$ (05) (10)

தேவையான வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 5250 + 630$$

$$= 5880 \quad (05)$$

35

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \qquad V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}$$

எனவே $U_r = V_r - V_{r+1}$. இதிலிருந்து $\frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r+1} - \frac{B}{r} - \frac{A}{r+2} + \frac{B}{r+1}$ (05)

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)}$$

இதிலிருந்து, $3r - 2 = Ar - B(r+2), \quad r \in \mathbb{Z}$ இற்கு (05)

r இன் வலுக்களின் குணகங்களை ஒப்பிடும்போது

$$\left.\begin{array}{ll} r^1: & 3 = A - B \\ r^0: & -2 = -2B \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} A = 4 \ (05) \\ B = 1 \ (05) \end{array}$$

20

$U_r = V_r - V_{r+1}$

$r = 1$; $U_r = V_r - V_2$

$r = 2$; $U_r = V_r - V_3$ } (05)

$\vdots \qquad \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots \; \vdots$

$r = n-1$; $U_{n-1} = V_{n-1} - V_n$

$r = n$; $U_n = V_n - V_{n+1}$ } (05)

$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1}$ (5)

$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)} \right)$ (05)

$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ (05)

25

$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right\}$ (5)

$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \frac{1}{n}) \; (1 + \frac{2}{n})} \right\}$

$= 1.$ (5)

ஆகவே முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும், அதே வேளை கூட்டுத்தொகை 1 ஆகும். (05)

15

$W_r = U_{r+1} - 2U_r$

$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$

$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2 \sum_{r=1}^{n} U_r$ (5)

$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r .$ (5)

10

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}W_r=\lim_{n\to\infty}\ U_{n+1}-U_1\ \ \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}U_r$$

$$=0-\frac{1}{6}-1 \quad (05)$$

$$=-\frac{7}{6}$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}W_r$ **ஒருங்கும் அதே வேளை கூட்டுத்தொகை** $-\frac{7}{6}$ **ஆகும்.** (05)

10

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{I}$ வரிசை 2 ஐ உடைய சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

மேலும், $a \neq 0$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

இப்போது, $a = 1$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{C}^{-1}$ ஐ எழுதுக.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ ஆகுமாறு தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் காண்க.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $|z|^2 = z\bar{z}$ எனக் காட்டி, அதனை $z - w$ இற்குப் பிரயோகித்து, $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z\bar{w} + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|1-z\bar{w}|^2$ இற்கும் ஓர் ஒத்த கோவையை எழுதி, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ எனக் காட்டுக.

$|w| = 1$, $z \neq w$ எனின், $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ என உய்த்தறிக.

(*c*) $1+\sqrt{3}\,i$ ஐ வடிவம் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

$(1+\sqrt{3}\,i)^m(1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^8$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு m, n ஆகியன நேர் நிறையெண்கள். த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, m, n ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிவதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(*a*) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5)

20

C^{-1} இருக்கின்றது $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (05)

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (05)

10

$a = 1$ ஆக இருக்கும்போது $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (05)

$$\therefore C^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (05)$$

10

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ (05)

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ (05)

$$\therefore P = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (05)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (05)$$

20

(*b*) Let $z = x + iy$.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ (5)

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore |z|^2 = z\bar{z}$. (5)

10

$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)}$ (5)

$= (z-w)\,(\overline{z}-\overline{w})$ (5)

$= z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$

$= |z|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + |w|^2$ (5)

$= |z|^2 - 2\,\text{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \longrightarrow$ (1)

15

$|1-\overline{z}w|^2 = 1 - 2\,\text{Re}(z\overline{w}) + |z\overline{w}|^2 \longrightarrow$ (2) (05)

(1) - (2) இலிருந்து

$|z-w|^2 - |1-z\overline{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\overline{w}|^2$ (05)

$= -\left(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2\right)$ (05)

$= -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right) \longrightarrow$ (3)

20

$|w| = 1$ ஆகையால் (3) இலிருந்து $|z-w|^2 - |1-zw|^2 = 0$ (05)

$\therefore |z-w| = |1-z\overline{w}|.$

இதிலிருந்து, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l}\therefore z \neq w \\ \Rightarrow z\overline{w} \neq 1\end{array}\right]$

$\therefore \left|\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| = 1$ (05)

10

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (05)

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ (05)

10

$$\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^m\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$$ (05)

$$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3}+i\,\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\,\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$$ (05)

$$\therefore 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\,\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$$

இதிலிருந்து $\Rightarrow m+n=8 \qquad (m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

(05) (05)

25

---

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 3$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க.

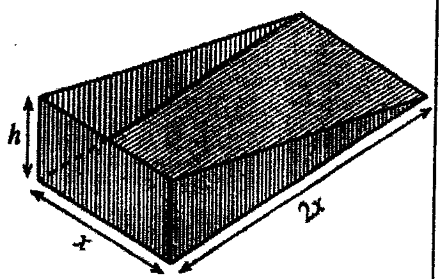
மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$x \neq 3$ இற்கு $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

(*b*) ஒரு தூசித் தட்டின் கைப்பிடி இல்லாத பகுதியை அருகே உள்ள உரு காட்டுகின்றது. சென்ரிமீற்றரில் அதன் பரிமாணங்கள் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவு x^2h cm^3 ஆனது 4500 cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது.
அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $S = 2x^2 + 3xh$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. $x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும் எனக் காட்டுக.



(ய) $x \neq 3$; $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

அப்போது $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ (10) (10) ~~(20)~~

$= \dfrac{(x-3)(4x-3) - 2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. (5)

minus mistake less (5)

Deduct
one mistake −5
two mistakes −10
more than two mistake − no marks

25

$f^1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ — (5)

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(-)	(-)	(-)
$f(x)$	↘ (05) குறைகின்றது	↗ (05) அதிகரிக்கின்றது	↘ (05) குறைகின்றது

→ less (5)

$\therefore f(x)$ ஆனது (1, 3) மீது அதிகரிக்கும் அதே வேளை, (- 2, 1) மீதும் $(3, \infty)$ மீதும் குறைகின்றது.

20

திரும்பற் புள்ளி : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ஓர் ஒரிட இழிவாகும். **05**

$x \neq 3$; இற்கு $f^1(x) = \frac{18x}{(x-3)^4}$

$f^1(x) = 0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0$ (05)

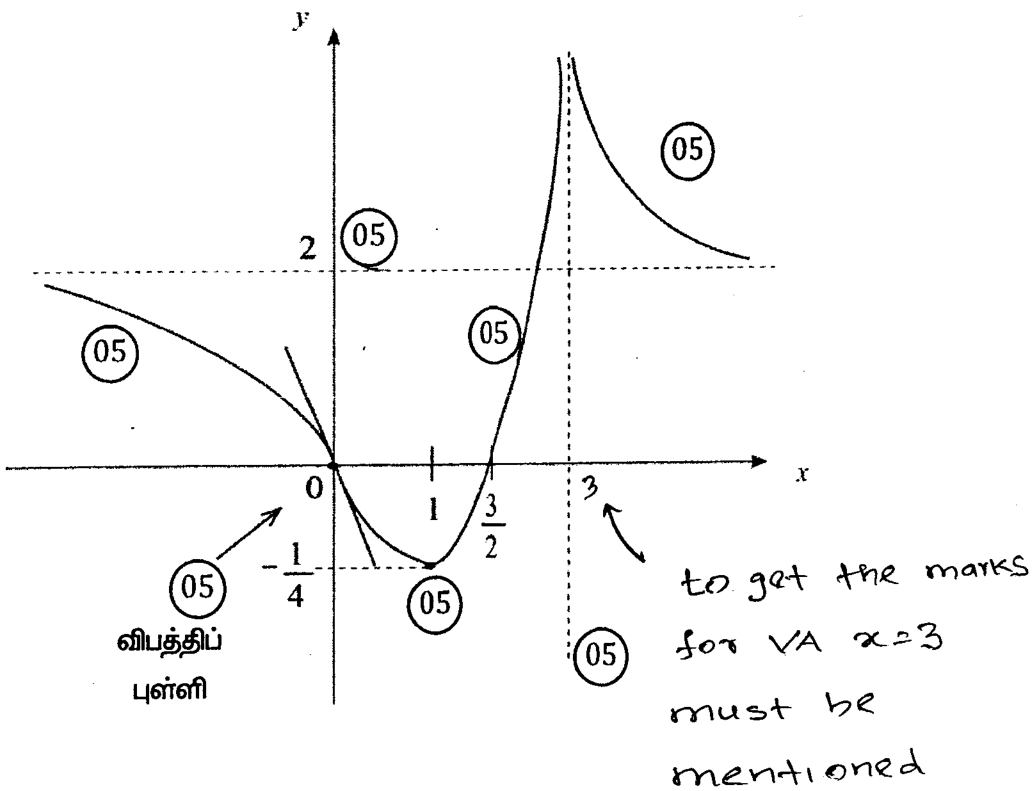
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f^1(x)$ இன் குறி	(-)	(+)
குழிவு	கீழ்நோக்கிக் குழிவானது (05)	மேல்நோக்கி குழிவானது (05)

Inflexion
-விபத்திப் புள்ளி

$\therefore$ விபத்திப் புள்ளி = (0, 0) (05) **20**

கிடை அணுகுகோடு : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore y = 2$ (5)

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு : $x = 3$ (5)



45

(b) $x^2h = 4500$

இதிலிருந்து $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x.\frac{4500}{x^2}, \quad \text{ஒ, 0 இற்கு}$$

(05)

$$\therefore \frac{ds}{dx} = 4x - 3 \times 4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^3 - 3375\right)}{x^2},$$

(05)

$$\frac{ds}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow x = 15$$

(05) (05) (10)

$0 < x < 15$ இற்கு $\frac{ds}{dr} < 0$; $x > 15$ இற்கு $x > 15, \frac{ds}{dr} > 0$ (05)

$\therefore x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும். (05)

35

15. (*a*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$ ஆகுமாறு A, B ஆகிய மாறிலிகள் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டுள்ளது.

A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ ஐக் காண்க.

(*b*) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\, dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(*c*) a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ஐப் பயன்படுத்தி,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\, dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\, dx = \frac{2\pi}{63}$ எனக் காட்டுக.

(ய) எல்லா $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + 2(x^2+9) + 2(x+1)^2$$

x இன் வலுக்களின் குணகங்களை ஒப்பிடும் போது

$x^3 : 1 = A.$ ← (5)

$x^0 : -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

(5) (5)

மாற்று முறை

பிரதியிடும்போது

$x = 1 : -30 = 10B \Rightarrow B = -3$ (5)

$x = 0 : -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A = 1$ (5)

15

$$\therefore \frac{x^3 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9} \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \quad (5)$$

Modulus needed (5) (5) (5)

If A, B wrong give 5 + 5 + 5

30

(b)

$$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x (1 - \cos 2\pi x) \, dx \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I} \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I. \quad (05) \qquad \text{——— } (1)$$

இப்போது $I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \, dx \quad (05) \quad (05)$$

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I}\right] \quad (05) \quad (05)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I. \quad (05) \quad (05)$$

$$\therefore I\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1}. \quad (05)$$

$$\therefore (1) \quad \int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)} \quad (05) + (05)$$

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1+4\pi^2}.$$

60

(c) $I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} \, dx$ (05) $= \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos^6 x \sin^3 x$ (05)

$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I}$ (05)

$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$. (05)

20

$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$

$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$ (05)

$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right]$ (05)

$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos^7 x}{7} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos^9 x}{9} \Big|_0^{\pi} \right]$ (05) (05)

$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right]$ (05)

$= \frac{2\pi}{63}$.

25

16. $A \equiv (1, 2)$ எனவும் $B \equiv (3, 3)$ எனவும் கொள்வோம்.

A, B ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

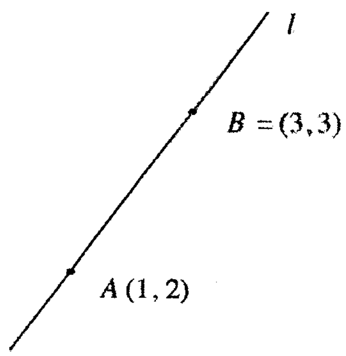
ஒவ்வொன்றும் l உடன் கூர்ங்கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஐ ஆக்கிக்கொண்டு A இனூடாகச் செல்லும் l_1, l_2 என்னும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் வடிவம் $(1+2t, 2+t)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

l_1, l_2 ஆகிய இரண்டையும் தொடுவதும் மையம் l மீது உள்ளதும் ஆரை $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ஐ உடையதும் முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அமைகின்றதுமான வட்டம் C_1 இன் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x-6y+\frac{31}{2}=0$ எனவும் காட்டுக.

விட்டம் ஒன்றின் முனைகள் A ஆகவும் B ஆகவும் உள்ள வட்டம் C_2 இன் சமன்பாட்டை எழுதுக.

C_1, C_2 ஆகிய வட்டங்கள் நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுகின்றனவா எனத் துணிக.



$$= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2} \quad (05)$$

l இன் சமன்பாடு $y-2 = \frac{1}{2}(x-1)$ (05)

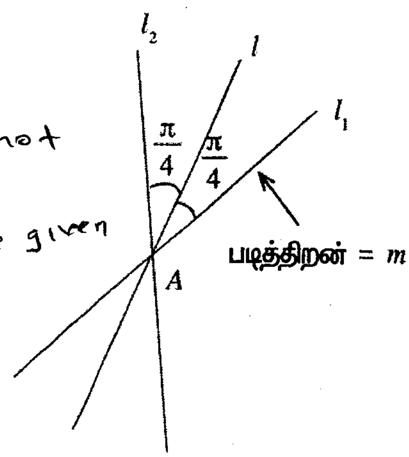
அ-து $x-2y+3=0$

10

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \quad (10) \rightarrow (10/0)$$

$$\therefore 1 = \left|\frac{2m-1}{2+m}\right| \quad (05)$$

If modulus is not considered 5+5 can be given



$$\Leftrightarrow 2+m = \pm(2m-1) \quad (05)$$

$$\Leftrightarrow 2+m = 2m-1 \text{ அல்லது } 2+m = -2m+1$$

$$\Leftrightarrow m=3 \ (05) \quad or \quad m = -\frac{1}{3} \ (05)$$

$l_1 : y-2 = 3(x-1);$ $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1)$

$l_1 : 3x - y - 1 = 0;$ (05) $l_2 : x + 3y - 7 = 0$ (05)

40

$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = t$ என்க. (05)

அப்போது $x = 1 + 2t, y = 2 + t$ இங்கு $t \in \mathbb{R}$ (05)

10

C_1 இற்கு

$P \equiv (1+2t, 2+t)$ l_1 இற்கு உள்ள செங்குதம்து தூரம் C_1 இன் ஆரைக்குச் சமன்

அ- து $\frac{|3(1+2t)-(2+t)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (05) (05) (10)

அ -து $|3+6t-2-t-1| = 5.$ (05)

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ (05)

$P = (3, 3) = B$ ஆகையால் $P = (-1, 1)$ உகந்ததன்று.
(05) (05)

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{2}.$ (05)

அ - து $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

அ - து $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ (05)

45

C_2 இன் சமன்பாடு

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0$ (15)

மையம்	(05)
ஆரை	(05)
சமன்பாடு	(05)

15

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(\frac{-5}{2}\right) = 27.$$ (5)

(5) (5)

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}.$$ (5)

$$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2.$$ (5)

$\therefore c_1, c_2$ ஆகியன நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுவதில்லை. (5)

30

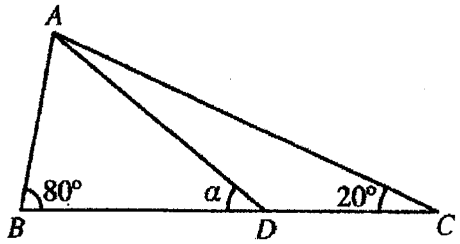
17. (*a*) $\sin(A-B)$ ஐ $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

(i) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$,

(ii) $2\sin 10^\circ=\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ$

என **உயத்தறிக.**

(*b*) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு முக்கோணி ABC இற்குச் **சைன் நெறியைக்** கூறுக.



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி ABC இல் $A\hat{B}C=80^\circ$ உம் $A\hat{C}B=20^\circ$ உம் ஆகும். BC மீது புள்ளி D ஆனது $AB=DC$ ஆகுமாறு உள்ளது. $A\hat{D}B=\alpha$ எனக் கொள்வோம்.

பொருத்தமான முக்கோணிகளுக்குச் **சைன் நெறியைப்** பயன்படுத்தி, $\sin 80^\circ\sin(\alpha-20^\circ)=\sin 20^\circ\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

ஏன் $\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$ என விளக்கி, **இதிலிருந்து,** $\tan\alpha=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-2\sin 10^\circ}$ எனக் காட்டுக.

மேலே (*a*)(ii) இல் உள்ள முடிவைப் பயன்படுத்தி $\alpha=30^\circ$ என **உய்த்தறிக.**

(*c*) சமன்பாடு $\tan^{-1}(\cos^2 x)+\tan^{-1}(\sin x)=\dfrac{\pi}{4}$ ஐத் தீர்க்க.

(a) *sin (A-B)= sin A cos B - cos A sin B* ~~(05)~~ (10/0)

10

(i) $\sin\left(90^0-\theta\right)=\sin 90^0\cos\theta-\cos 90^0\sin\theta$ (05)

$=\cos\theta$ (05)

(∴ sin 90⁰ = 1, cos 90⁰ = 0)

10

(iii) $2\sin 10^0=2\sin\left(30^0-20^0\right)$ (05)

$=2\sin 30^0\cos{-}20^0-2\cos 30^0\sin 20^0$ (05)

$=\cos 20^0-\sqrt{3}\sin 20^0$ (05)

$\left(\sin 30^0=\dfrac{1}{2},\ \cos 30^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

15

(b) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ (05) + (05)

இங்கு $BC = a,\ CA = b,\ AB = C$

10

சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தும்போது

முக்கோணி ABD இற்கு $\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin 80^0}$ (10)

முக்கோணி ADC இற்கு $\dfrac{DC}{\sin\left(\alpha-20^0\right)}=\dfrac{AD}{\sin 20^0}$ (10)

$$\therefore \frac{\sin\left(\alpha-20^0\right)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 20^0}{\sin 80^0}$$

$\therefore \sin 80^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=\sin 20^0 \sin\alpha$ (05)

25

$\sin 80^0 \sin\left(90^0-20^0\right)=\cos 10^0$ (05)

(05)

இப்போது $\sin 80^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=\sin 20^0 \sin\alpha$ இதிலிருந்து

$\cos 10^0 \sin\left(\alpha-20^0\right)=2\sin 10^0 \cos 10^0 \sin\alpha$

(05) (05)

$\therefore \sin\alpha\cos 20^0-\cos\alpha\sin 20^0=2\sin 10^0\sin\alpha$

(05)

$\therefore \tan\alpha\left(\cos 20^0-2\sin 10^0\right)-\sin 20^0$ இதிலிருந்து $\tan\alpha=\dfrac{\sin 20^0}{\cos 20^0-2\ \sin 10^0}$

(05) (05)

35

(a) (ii) இதற்கேற்ப $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (05)

$\therefore \alpha = 30^0$ (05) $\left(20^0 < \alpha < 90^0\right)$

10

(c) $\tan^{-1}\left(\cos^2 x\right) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}.$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\cos^2 x\right)$ அல்லது $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta.$$

$$\therefore \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \quad (5)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\beta}. \quad (5)$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}. \quad (5)$$

$\cos^2 x(1+\sin x) = (1-\sin x)$

$\left(1-\sin^2 x\right)(1+\sin x) = (1-\sin x)$ (05)

$(1-\sin x)(1+\sin x)^2 = 1-\sin x$

$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = \pm 1$ $\quad (\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = 0$ (05) $\quad (\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\Rightarrow x = n\pi + (-1)\dfrac{\pi}{2}$ (05) அல்லது $m \in \mathbb{Z}$ இற்கு $x = m\pi$ (05)

35

மாற்று முறை

$\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$ (05)

$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ (05)

$\therefore \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \sin x$ (05)

$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1 - \sin^2 x)\sin x$ (05)

$\sin x\,(1 - \sin x)(2 + \sin x) = 0$

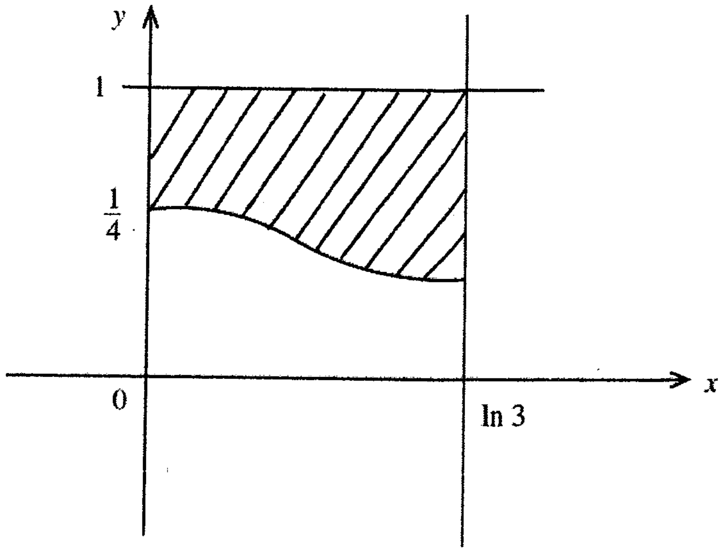
$\Rightarrow \sin x = 1$ அல்லது $\sin x = 0$ (05) $(\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}$ (05) $x = m\pi\,;\, m \in \mathbb{Z}$.

35

பழைய பாடத்திட்டம்

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$, $x=0, x=\ln 3$, $y=1$ என்னும் வளையிகளினால் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$ எனக் காட்டுக.



தேவையான பரப்பளவு $= \displaystyle\int_0^{\ln 3}\left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\right\} dx$ (5)

$u = 1 + e^x.$

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du$ (5)

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ (5)

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \dfrac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}.$ (5)

25

7. ஒரு வளையி C ஆனது $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ இற்கு $x = 2t - \cos 2t,\ y = 1 - \sin 2t$ ஆகியவற்றினால் பரமானமாகத் தரப்படுகின்றது. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ஐ t இல் காண்க.
வளையி C இற்கு அதன் மீது $t = \frac{\pi}{12}$ இற்கு ஒத்த புள்ளியில் வரையப்படும் செவ்வன் கோட்டின் சமன்பாடு $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0$ எனக் காட்டுக.

$$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\cos 2t. \quad (5)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t} \quad (5)$$

$t = \frac{\pi}{12}$ ஆகையால் $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (5)

தேவையான செவ்வன்னின் படித்திறன் $= \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \quad (5)$$

தேவையான சமன்பாடு

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

அ - து $6\sqrt{3x} - 6y - \sqrt{3}\pi + 12 = 0$ (5)

25

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{I}$ வரிசை 2 ஐ உடைய சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம் ஆகும்.

மேலும், $a \neq 0$ ஆக **இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம்** $\mathbf{C}^{-1}$ இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

இப்போது, $a = 1$ எனக் கொள்வோம். $\mathbf{C}^{-1}$ ஐ எழுதுக.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ ஆகுமாறு தாயம் $\mathbf{P}$ ஐக் காண்க.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ எனக் கொள்வோம். $|z|^2 = z\bar{z}$ எனக் காட்டி, அதனை $z - w$ இற்குப் பிரயோகித்து,

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\text{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ எனக் காட்டுக.

$|1 - z\bar{w}|^2$ இற்கும் ஓர் ஒத்த கோவையை எழுதி, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ எனக் காட்டுக.

$|w| = 1$, $z \neq w$ எனின், $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ என உயத்தறிக.

(c) $1+\sqrt{3}i$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r > 0$ உம் $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி O ஆனது உற்பத்தியையும் புள்ளி A ஆனது சிக்கல் எண் $1+\sqrt{3}i$ ஐயும் வகைகுறிக்கின்றன. $OABCDE$ ஆனது, O, A ஆகியன அதன் இரு அடுத்தடுத்த உச்சிகளாகவும் உச்சிகளின் வரிசை இடஞ்சுழிப் போக்கிலும் எடுக்கப்பட்ட, ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். B, C, D, E ஆகிய புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

(a) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ (5)

$\therefore A^TB - I = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ (5)

20

C^{-1} இருக்கின்றது $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ (05)

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ (05)

10

$a = 1$ ஆக இருக்கும் போது $= 1,\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (5)

$\therefore\ C^{-1} = \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (5)

10

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ (5)

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ (5)

$\therefore\ P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ (5)

20

(b) $Z = x + iy$ எனக் கொள்வோம்.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ (5)

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore\ |z|^2 = z\bar{z}$. (5)

10

$$|Z-W|^2=(Z-W)(\overline{Z-W})\ \text{(05)}$$

$$=(Z-W)(\bar{Z}-\bar{W})\quad \text{(05)}$$

$$=Z\bar{Z}-Z\bar{W}-\bar{Z}W+W\bar{W}$$

$$=|Z|^2-(Z\bar{W}+Z\bar{W})+|W|^2\ \text{(05)}$$

$$=|Z|^2-2\operatorname{Re}(Z\bar{W})+|W|^2 \longrightarrow (1)$$

15

$$|1-\bar{z}w|^2=1-2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|z\bar{w}|^2 \longrightarrow (2)\ \text{(05)}$$

(1) - (2) இலிருந்து

$$|z-w|^2-|1-z\bar{w}|^2=|z|^2+|w|^2-1-|z\bar{w}|^2\ \text{(05)}$$

$$=-\left(1-|w|^2-|z|^2+|z|^2|w|^2\right)\ \text{(05)}$$

$$=-\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right) \longrightarrow (3)$$

20

$|w|=1$ ஆகையால் (3) இலிருந்து $|z-w|^2-|1-zw|^2=0$ (05)

$\therefore |z-w|=|1-z\bar{w}|$

இதிலிருந்து $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|}=1$ $\quad \begin{bmatrix}\therefore z\neq w\\ \Rightarrow z\bar{w}\neq 1\end{bmatrix}$

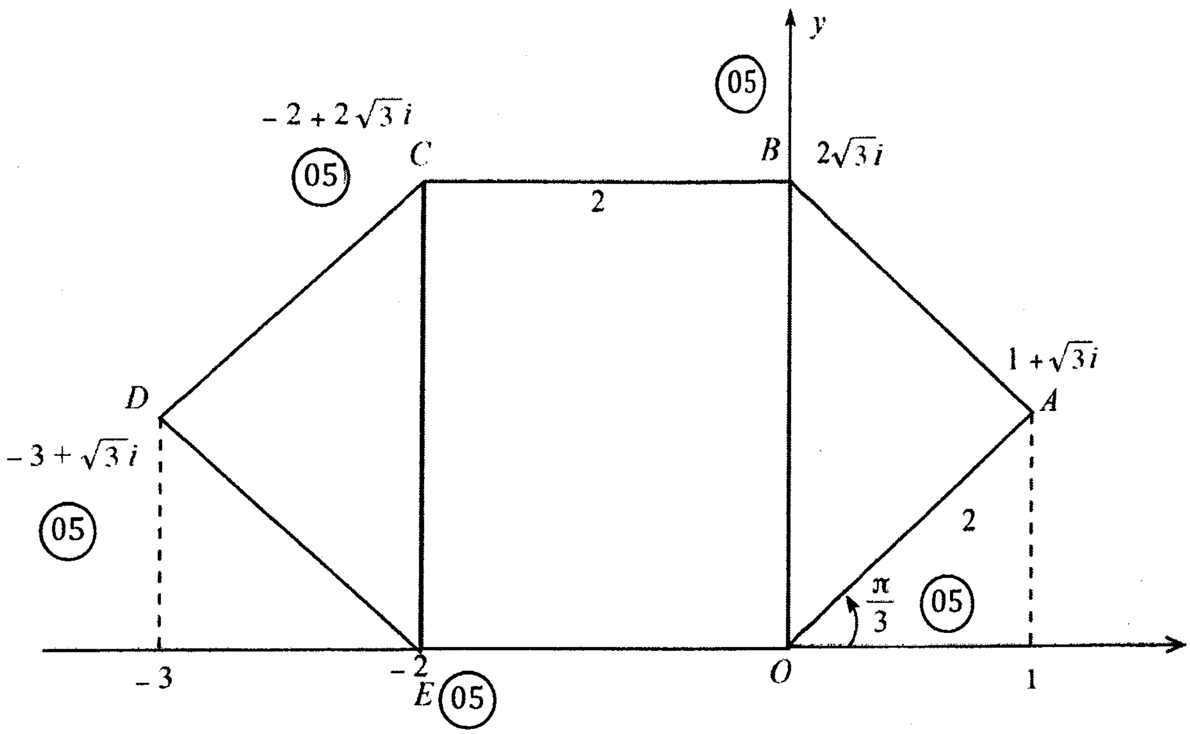
$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|=1\ \text{(05)}$$

10

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (05)

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\,\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ (05)

10



25

14. (*a*) $x \neq 3$ இற்கு $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

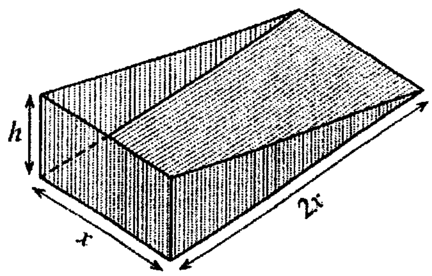
$f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq 3$ இற்கு $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க. மேலும் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$y = f(x)$ இன் வரைபை அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, x - வெட்டுத்துண்டுகள் ஆகியவற்றைக் காட்டிப் பரும்படியாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(*b*) ஒரு தூசித் தட்டின் கைப்பிடி இல்லாத பகுதியை அருகே உள்ள உரு காட்டுகின்றது. சென்ரிமீற்றரில் அதன் பரிமாணங்கள் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவு x^2h cm^3 ஆனது 4500 cm^3 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு S cm^2 ஆனது $S = 2x^2 + 3xh$ இனால் தரப்பட்டுள்ளது. $x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும் எனக் காட்டுக.



(*a*) $x \neq 3;$ $\quad f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

அப்போது $f^1(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}[2x-3+2x] - \dfrac{2x-(2x-3)}{(x-3)^3}$ (20)

$= \dfrac{(x-3)(4x-3)-2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2-15x+9-4x^2+6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ (05)

25

$f^1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f^1(x)$ இன் குறி	(-)	(-)	(-)
$f(x)$	↘ (05) குறைகின்றது	↗ (05) அதிகரிக்கின்றது	↘ (05) குறைகின்றது

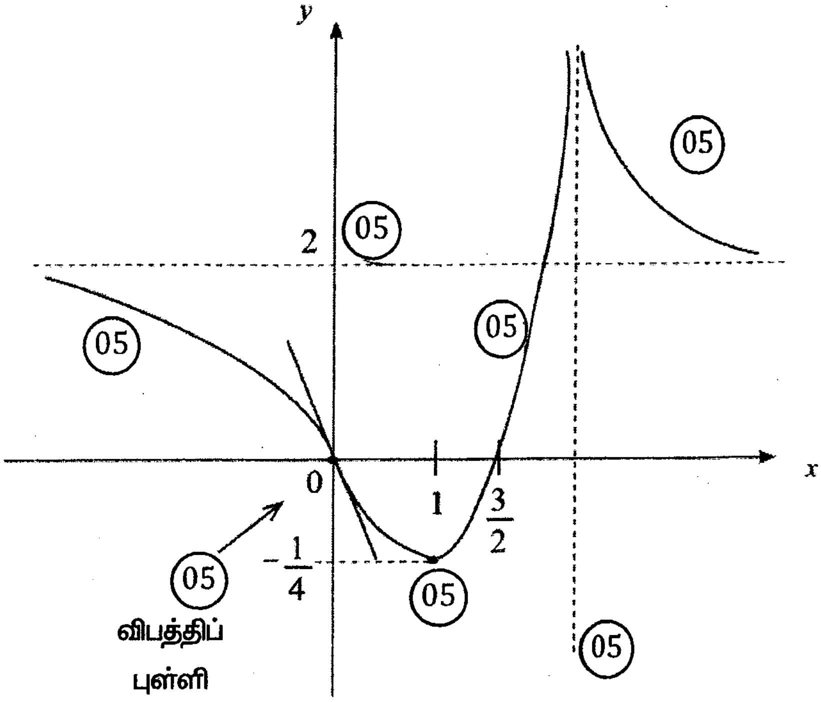
$\therefore f(x)$ ஆனது (1, 3) மீது அதிகரிக்கும் அதே வேளை, $(-\infty, 1)$ மீதும் $(3, \infty)$ மீதும் குறைகின்றது.

20

திரும்பற் புள்ளி : $\left(1,-\frac{1}{4}\right)$ ஓர் ஒளிட இழிவாகும். **05**

கிடை அணுகுகோடு : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \quad \therefore y=2$

நிலைக்குத்து அணுகோடு : $x = 3$



45

$$\frac{1}{1+f(x)}\le\frac{1}{3}$$

$1+f(x)>0$ ஆகும்.

$\therefore 3\le 1+f(x).$

$\therefore f(x)\ge 2.$ (05)

$f(x)=2 \Leftrightarrow x(2x-3)=2(x-3)^2.$ (05)

$\Leftrightarrow 2x^2-3x=2(x^2-6x+9)$

$\Leftrightarrow x=2$ (05)

X இன் தேவையான பெறுமானங்கள் $2\le x<3,\ \ x>3$ ஆகும். **20**

(b) $x^2h = 4500$

இதிலிருந்து $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x.\frac{4500}{x^2}, \qquad x > 0 \text{ இற்கு}$$

(05)

$$\therefore \frac{ds}{dx} = 4x - 3\times 4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4\left(x^3 - 3375\right)}{x^2}$$

(05)

$\frac{ds}{dx} = 0$ (05) $\Leftrightarrow x = 15$ (05)

$0 < x < 15$ இற்கு $\frac{ds}{dr} < 0;$ $x > 15$ இற்கு $\frac{ds}{dr} > 0$ (05)

$\therefore x = 15$ ஆக இருக்கும்போது S குறைந்தபட்சமாகும். (05)

35

அந்தரங்கமானது

NEW/OLD

இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம் II

புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்

புள்ளியிடும் திட்டம்

இந்த விடைத்தாள் பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்காக தயாரிக்கப்பட்டது. பிரதம பரீட்சகர்களின் கலந்துரையாடல் நடைபெறும் சந்தர்ப்பத்தில் பரிமாறிக்கொள்ளப்படும் கருத்துக்களுக்கேற்ப இதில் உள்ள சில விடயங்கள் மாற்றப்படலாம்.

இறுதித் திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன

முழுப்பதிப்புரிமையுடையது

க.பொ.த (உயர் தர)ப் பரீட்சை - 2020

10 - இணைந்த கணிதம் II

(புதிய / பழைய பாடத்திட்டம்)

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பகுதி I

பகுதி A	10 × 25	=	250
பகுதி B	05 × 150	=	750

மொத்தம்	=	1000/10
வினாத்தாள் I மொத்தப் புள்ளி	=	100

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்பட்டியலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஓர் அங்கீகரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குமிழ்முனை பேனாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரீட்சகரின் குறியீட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது **தெளிவான இலக்கத்தில்** எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தனிக்கோட்டினால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் △ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரீட்சகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i) .... ✓ $\frac{4}{5}$
....
....

(ii) .... ✓ $\frac{3}{5}$
....
....

(iii) .... ✓ $\frac{3}{5}$
....
....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பொ.த.(உ. தர) மற்றும் தகவல் தொழிநுட்பப் பரீட்சைக்கான துளைத்தாள் திணைக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக துளையிடப்பட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அத்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரீட்சகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளை நன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிடக்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரீட்சார்த்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோடிடவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வவ் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அத்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரீட்சார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இடங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கோடிட்டு வெட்டிவிடவும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோடிடவும். புள்ளி வழங்கக்கூடிய இடங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஓவலண்ட் கடதாசியின் இடது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியினுள் வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அறிவுறுத்தலின் படி வினாக்கள் தெரிவு செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கூட்டில் பதியவும். விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதத்தில் எழுதுவும்.

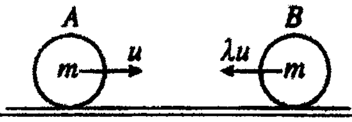
புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை சகல பாடங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினுள் கணிப்பிடப்படமாட்டாது. இது தவிர ஒவ்வொரு வினாப் பத்திரத்துக்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரம் I ற்கான பல்தேர்வு வினாப்பத்திரம் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும். 51 சித்திரப் பாடத்திற்குரிய I, II, மற்றும் III ஆம் வினாப்பத்திரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதிந்து எழுத்திலும் எழுதுதல் வேண்டும்.

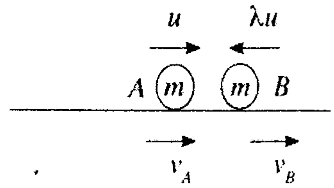
ooo

புதிய
பாடத்திட்டம்

1. ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m ஆகவுள்ள A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது ஒரே நேர்கோட்டில் ஆனால் எதிர்த் திசைகளில் இயங்கிக்கொண்டு நேரடியாக மோதுகின்றன. மோதுகைக்குச் சற்று முன்னர் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே u, λu ஆகும். A இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.



மோதுகைக்குச் சற்றுப் பின்னர் A இன் வேகத்தைக் கண்டு, $\lambda > \frac{1}{3}$ எனின், A இன் இயக்கத் திசை புறமாற்றப்படுமெனக் காட்டுக.



A, B ஆகியவற்றுக்கு $\underset{-}{I} \equiv \Delta\left(m\underset{-}{v}\right) \rightarrow$: ஐப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\left(mv_A + mv_B\right) - \left(mu - m\lambda u\right) = 0$$

$$\therefore v_A + v_B = (1-\lambda)u \text{ ——— (1)} \quad (10)$$

நியூற்றனின் பரிசோதனை முறை விதியிலிருந்து

$$v_B - v_A = \frac{1}{2}(u + \lambda u) \text{ ——— (2)} \quad (5)$$

$$(1) - (2) \quad 2v_A = u - \lambda u - \frac{1}{2}u - \frac{\lambda}{2}u$$

$$v_A = \frac{1}{4}(1-3\lambda)u \quad (5)$$

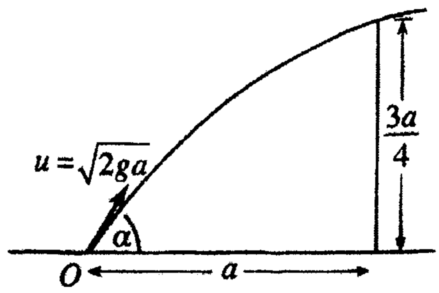
$\lambda > \frac{1}{3}$ எனின், $v_A < 0$ (5)

$\therefore A$ இன் இயக்கத் திசை புற மாற்றப்படுகின்றது.

25

2. ஒரு துணிக்கை ஒரு கிடை நிலத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து கிடையுடன் கோணம் $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ இல் தொடக்க வேகம் $u=\sqrt{2ga}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை O இலிருந்து ஒரு கிடைத் தூரம் a இல் இருக்கும் உயரம் $\frac{3a}{4}$ ஐக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு மட்டுமட்டாக மேலாகச் செல்கின்றது. $\sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\alpha = \tan^{-1}(2)$ எனக் காட்டுக.



0 இலிந்து A இற்குச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் வ எனக் கொள்வோம்.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும் போது

$\rightarrow$ $a = u\cos\alpha\, t$ —— (1) (5)

$\uparrow$ $\frac{3a}{4} = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$ —— (2) (5)

இப்போது (1) $\Rightarrow t = \frac{a}{u\cos\alpha}$

(2) $\Rightarrow \frac{3a}{4} = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\,\frac{a^2}{2ga\cos^2\alpha}$ (5)

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \tan\alpha - \frac{1}{4}\sec^2\alpha$

$\Rightarrow \sec^2\alpha - 4\tan\alpha + 3 = 0$ (5)

$\Rightarrow \left(1+\tan^2\alpha\right) - 4\tan\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow \left(1+\tan^2\alpha\right) - 4\tan\alpha + 4 = 0$

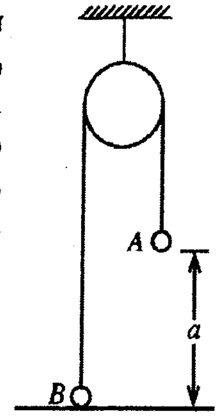
$\Rightarrow \left(\tan\alpha - 2\right)^2 = 0$

$\therefore \tan\alpha = 2$ (5)

$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2)$

25

3. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள், ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளில் இணைக்கப்பட்டு, உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு துணிக்கை A ஒரு கிடை நிலத்திலிருந்து உயரம் a இலும் துணிக்கை B நிலத்தைத் தொட்டுக் கொண்டும் இருக்கும்போது நாப்பத்தில் உள்ளன. இப்போது துணிக்கை A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி ஒரு கணத்தாக்கு mu வழங்கப்படுகின்றது. கணத்தாக்கிற்குச் சற்றுப் பின்னர் துணிக்கை A இன் வேகத்தைக் காண்க.
A நிலத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தை எழுதுக.

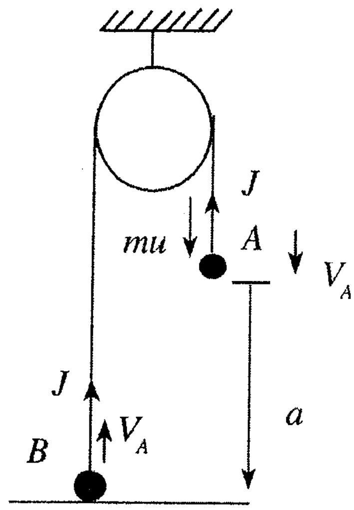


$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ ஐப் பிரயோகிக்கும் போது

(A) $\downarrow$ $mu - J = mV_A$ (5)

(B) $\uparrow$ $J = mV_A$ (5)

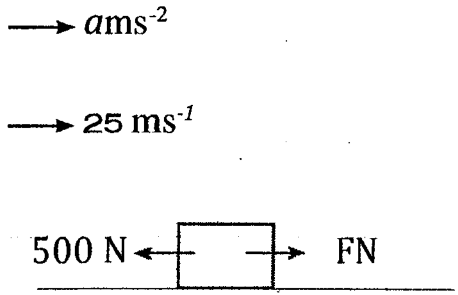
$\therefore V_A = \dfrac{u}{2}$ (5)



$T = \dfrac{a}{V_A} = \dfrac{2a}{u}$ (5)

25

4. திணிவு 1500 kg ஐ உடைய ஒரு கார் பருமன் 500 N ஐ உடைய ஒரு மாறாத் தடைக்கெதிரே ஒரு நேர்க் கிடை வீதியில் செல்கின்றது. காரின் எஞ்சின் 50 kW வலுவில் தொழிற்பட்டு கார் 25 m s^{-1} கதியில் செல்லும்போது அதன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.
இக்கணத்தில் காரின் எஞ்சின் தொழிற்படாமல் நிற்பாட்டப்படுகின்றது. எஞ்சின் தொழிற்படாமல் நிற்பாட்டப்படும் கணத்திலிருந்து 50 செக்கன்களிற்குப் பின்னர் காரின் கதியைக் காண்க.



வலு 50 kW ஆகையால்,

$50\times10^3 = F\times25$ (5)

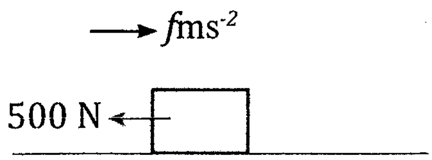
$\therefore F = 2000$

$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$F - 500 = 1500a$ (5)

$\therefore a = 1$ (5)

எஞ்சின் தொழிற்படாமல் நிற்பாட்டப்படும் போது



$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$

$-500 = 1500f$ (5)

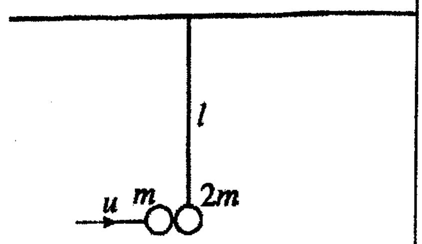
$\therefore f = -\frac{1}{3}$

$v = u + at \rightarrow$ ஐப் பிரயோகிக்கும் போது $v = 25 - \frac{1}{3}\times 50$

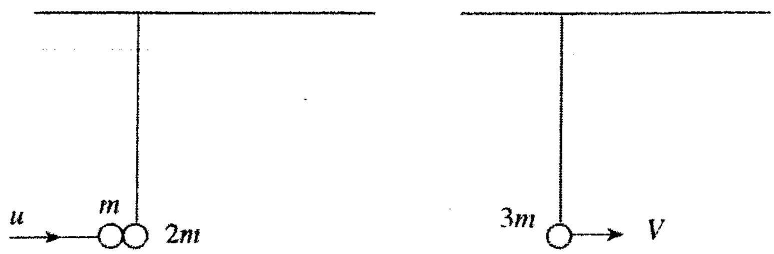
$v = \frac{25}{3}\,ms^{-1}$ (5)

25

5. நீளம் l ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் மூலம் ஒரு கிடைச் சீலிங்கிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கும் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P நாப்பத்தில் உள்ளது. ஒரு கிடைத் திசையில் வேகம் u உடன் இயங்கும் திணிவு m ஐ உடைய வேறொரு துணிக்கையானது துணிக்கை P உடன் மோதி அதனுடன் இணைகின்றது. மோதுகைக்குப் பின்னரும் இழை இறுக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை சேர்த்தித் துணிக்கை சீலிங்கை மட்டுமட்டாக அடைகின்றது. $u=\sqrt{18gl}$ எனக் காட்டுக.



அ. ச = 0



m இற்கும் $2\,m$ இற்கும் $\rightarrow \underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$0 = 3mV - mu \quad (5)$$

$$\therefore V = \frac{u}{3} \quad (5)$$

சேர்த்தித் துணிக்கைக்குச் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\frac{1}{2}(3m)V^2 - 3mgl = 0 \quad (10)$$

(5)+(5)

$$\therefore V^2 = 2gl$$

$$\therefore \frac{u^2}{9} = 2gl$$

இதிலிருந்து, $u = \sqrt{18gl}$ (5)

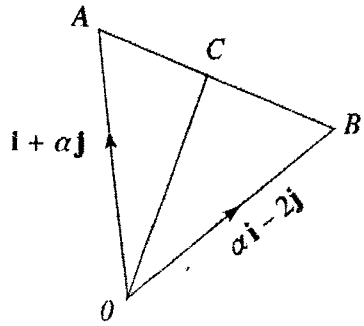
25

6. $\alpha > 0$ எனவும் வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j},\ \alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ எனவும் கொள்வோம். மேலும் AB மீது C ஆனது $AC : CB = 1:2$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளியாகும். OC ஆனது AB இற்குச் செங்குத்தானதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -(\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}) + (\alpha\mathbf{i}-2\mathbf{j}) \quad (5)$$

$$= (\alpha-1)\mathbf{i} - (\alpha+2)\mathbf{j}$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (5)$$

$$= (\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}) + \frac{1}{3}[(\alpha-1)\mathbf{i} - (\alpha+2)\mathbf{j}] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{3}[(\alpha+2)\mathbf{i} + 2(\alpha-1)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha+2) - 2(\alpha+2)(\alpha-1) = 0$$

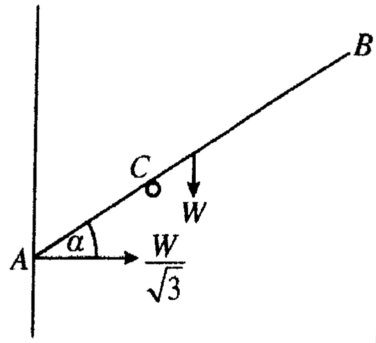
$$\Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha+2) = 0$$

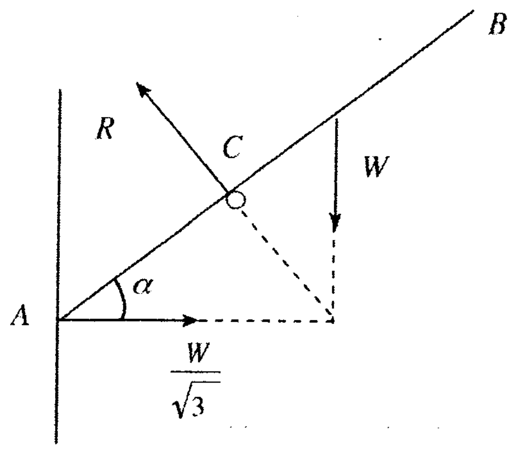
$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \quad (5) \qquad (\because \alpha > 0)$$

25

7. நீளம் $2a$ ஐயும் நிறை W ஐயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் ACB ஆனது உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரே இருக்க C இல் வைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையினால் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A இல் சுவரின் மூலம் ஏற்படுத்தப்படும் மறுதாக்கம் $\frac{W}{\sqrt{3}}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. கோல் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் α ஆனது $\frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக.

$AC = \frac{3}{4}a$ எனவும் காட்டுக.





கோலின் நாப்பத்திற்கு

$\rightarrow \quad R\sin\alpha = \frac{W}{\sqrt{3}}$ —— (1) (5)

$\uparrow \quad R\cos\alpha = W$ —— (2) (5)

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

இப்போது (1) $\Rightarrow R = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$A \quad R \times AC = W \times a\cos\frac{\pi}{6}$ (5) (அல்லது $Wa \cos\alpha$)

$\frac{2W}{\sqrt{3}} \times AC = W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AC = \frac{3}{4}a$ (5)

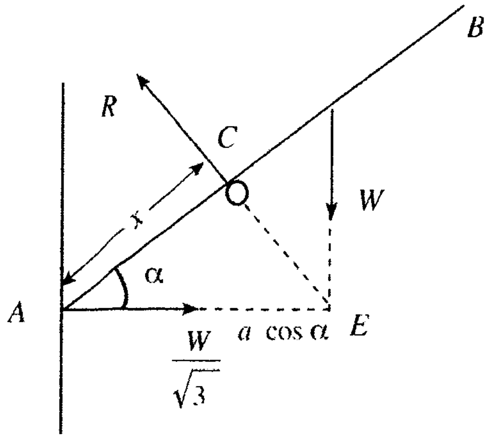
25

மாற்று முறை I

AB ↗ $\frac{W}{\sqrt{3}}\cos\alpha = W\sin\alpha$ (10)

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)



C ↶ $\frac{W}{\sqrt{3}} \times x\sin\frac{\pi}{6} = W \times (a-x)\cos\frac{\pi}{6}$ (5) அல்லது $x = AE\cos\alpha$

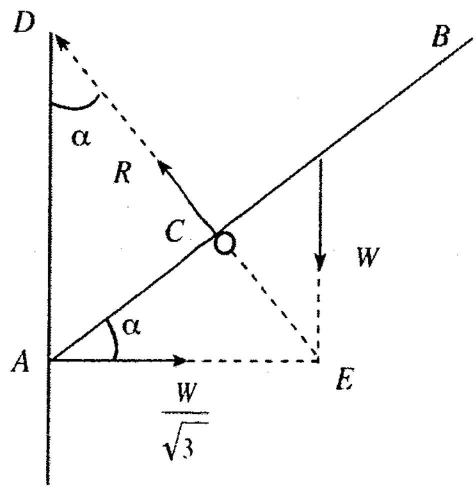
$\frac{1}{\sqrt{3}} \times x \times \frac{1}{2} = (a-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 3(a-x)$

$x = \frac{3}{4}a$ (5)

மாற்று முறை II

$\triangle ADE$ ஒரு விசை $\triangle$ ஆகும். (5)



$\frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{AE} = \frac{W}{AD}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (5)

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

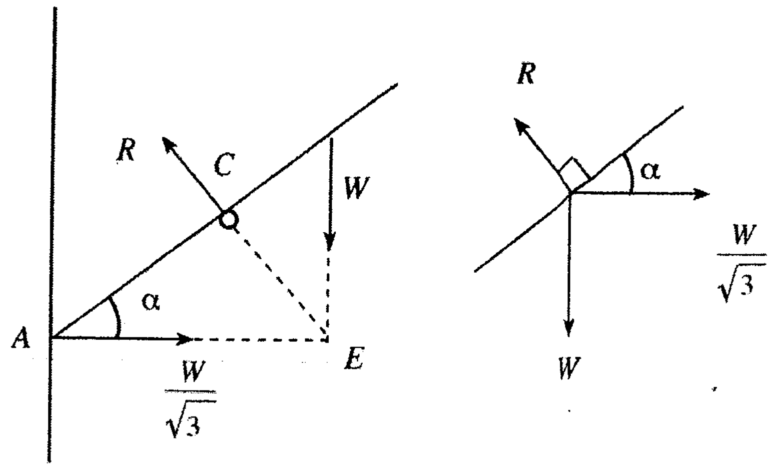
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ (5)

$\therefore AE = a\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (5)

$AC = AE\cos\frac{\pi}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{4}a$ (5)

மாற்று முறை III



இலாமியின் விதிக்கேற்ப

$$\frac{W}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{\frac{W}{\sqrt{3}}}{\sin(\pi-\alpha)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

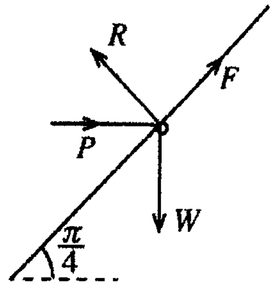
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

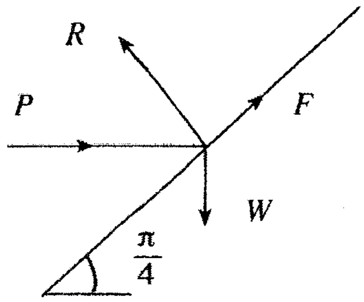
$AC = AE\cos\alpha$ ஆகையால் $AC = \frac{3}{4}a$ (5) + (5)

8. நிறை W ஐ உடைய ஒரு சிறிய பவளம் கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு நிலைத்த கரடான நேர்க் கம்பியில் கோக்கப்பட்டுள்ளது. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு பருமன் P ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் பவளம் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. பவளத்திற்கும் கம்பிக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

பவளத்தின் மீது உள்ள உராய்வு விசை F ஐயும் செவ்வன் மறுதாக்கம் R ஐயும் துணிவதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளை P, W ஆகியவற்றில் பெறுக.

$\frac{F}{R}=\frac{W-P}{W+P}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $\frac{W}{3}\le P\le 3W$ எனக் காட்டுக.





$$F=\frac{W-P}{W+P}$$

பவளத்தின் நாப்பத்திற்கு

$\nearrow$ $F-\frac{W}{\sqrt{2}}+\frac{P}{\sqrt{2}}=0$ (5) $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right.$ அல்லது $\sin\frac{\pi}{4}$ உடன்$\left.\right)$

$R-\frac{W}{\sqrt{2}}-\frac{P}{\sqrt{2}}=0$ (5) $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right.$ அல்லது $\sin\frac{\pi}{4}$ உடன்$\left.\right)$

$\mu\ge\frac{|F|}{R}$ → stop here 5 can be given

$\frac{1}{2}\ge\frac{|W-P|}{W+P}$ (10)

தனிப் பெறுமானம் இல்லாவிட்டால் (5) மாத்திரம்

$\therefore |W-P|\le\frac{1}{2}(W+P)$

$\therefore -\frac{1}{2}(W+P)\le W-P\le\frac{1}{2}(W+P)$

இதிலிருந்து $\frac{W}{3}\le P\le 3W$ (5)

25

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி Ω இன் இரு நிகழ்வுகளெனக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $P(B)$ ஐக் காண்க.

A, B ஆகிய நிகழ்வுகள் **சாராதன அல்ல** எனக் காட்டுக.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20} \quad (5)$$

இப்போது $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (5)

இதிலிருந்து $\frac{4}{5}=\frac{3}{5}+P(B)-\frac{3}{20}$

$$\therefore P(B)=\frac{16}{20}-\frac{12}{20}+\frac{3}{20}=\frac{7}{20} \quad (5)$$

அப்போது $P(A).P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{7}{20}=\frac{21}{100}$ (5)

$$\therefore P(A\cap B)\neq P(A).P(B) \quad (5)$$

$\therefore A, B$ ஆகியன சாராதன அல்ல.

25

10. ஒவ்வொன்றும் 10 இலும் குறைந்த அல்லது அதற்குச் சமமான நேர் நிறைவெண்களின் 5 நோக்கல்களைக் கொண்ட ஒரு தொடையின் இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 6 இற்குச் சமமாகும். நோக்கல்களின் வீச்சு 9 ஆகும். இந்த ஐந்து நோக்கல்களையும் காண்க.

ஆகாரம் $= 6 \Rightarrow$ எண்களில் குறைந்தபட்சம் இரண்டு எண்கள் 6, 6 ஆக இருக்க வேண்டும். (5)

வீச்சு = 9 எண்கள் நேர் நிறைவெண்கள் ≤ 10 ஆகும். சிறிய எண் 1 உம் பெரிய எண் 10 உம் ஆகும். (5)

இடையம் 6 ஆகையால், எண்கள்

1, a, 6, 6, 10
1, 6, 6, a, 10 } ஆக இருக்க வேண்டும். (5)

இடை $= \dfrac{a+23}{5} = 6$ (5)

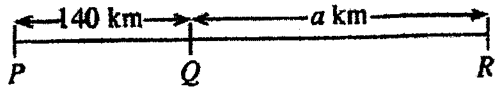
$\therefore a = 7$ (5)

$\therefore$ எண்கள் 1, 6, 6, 7, 10 ஆகும்.

without method, just writing the numbers 10 marks only

25

11. (*a*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு P, Q, R என்னும் மூன்று புகையிரத நிலையங்கள் $PQ = 140$ km ஆகவும் $QR = a$ km ஆகவும் இருக்குமாறு ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன. நேரம் $t = 0$ இல் ஒரு புகையிரதம் A ஆனது P இல் ஓய்விலிருந்து ஆரம்பித்து Q ஐ நோக்கி அரைமணித்தியாலத்திற்கு ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் f km h^{-2} உடன் சென்று நேரம் $t = \frac{1}{2}$ h இல் அதற்கு இருந்த வேகத்தை மூன்று மணித்தியாலங்களுக்குப் பேணிக்கொண்டு செல்கின்றது. பின்னர் அது மாறா அமர்முடுகல் f km h^{-2} உடன் சென்று Q இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. நேரம் $t = 1$ h இல் வேறொரு புகையிரதம் B ஆனது R இல் ஓய்விலிருந்து ஆரம்பித்து Q ஐ நோக்கி T மணித்தியாலத்திற்கு மாறா ஆர்முடுகல் $2f$ km h^{-2} உடனும் அதன் பின்னர் மாறா அமர்முடுகல் f km h^{-2} உடனும் சென்று Q இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. இரு புகையிரதங்களும் ஒரே கணத்தில் ஓய்வுக்கு வருகின்றன. A, B ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

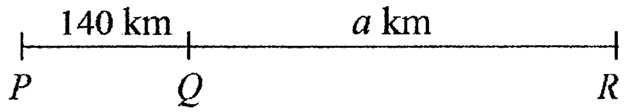


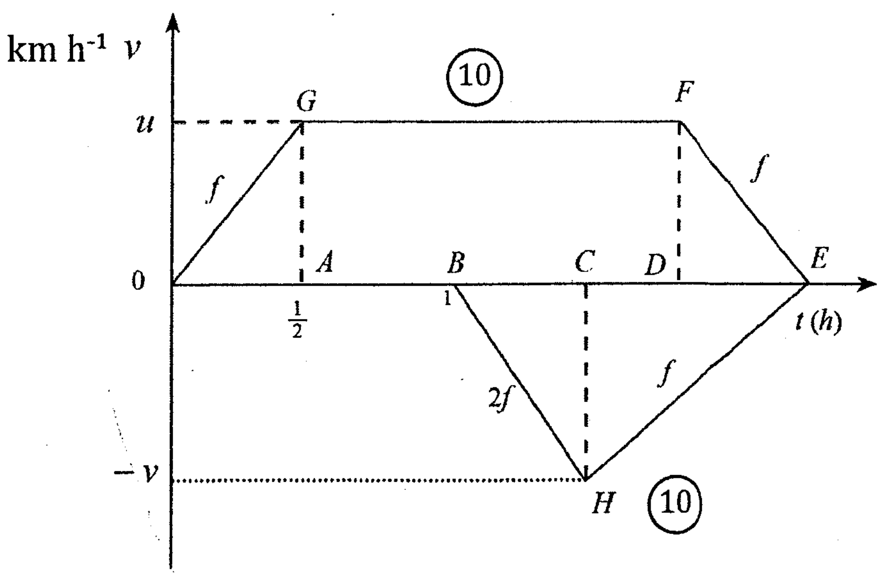
இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $f = 80$ எனக் காட்டி, T, a ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(*b*) ஒரு கப்பல் பூமி தொடர்பாகச் சீரான கதி u உடன் மேற்குநோக்கிச் செல்லும் அதே வேளை ஒரு படகு பூமி தொடர்பாகச் சீரான கதி $\frac{u}{2}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையிற் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் படகிலிருந்து d தூரத்தில் வடக்கிலிருந்து கிழக்கிற்குக் கோணம் $\frac{\pi}{3}$ இல் கப்பல் உள்ளது.

(i) படகு பூமி தொடர்பாக வடக்கிலிருந்து மேற்கிற்குக் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஐ ஆக்கும் திசையில் செல்கின்றதெனின், படகு கப்பலை இடைமறிக்கலாமெனக் காட்டி, அது கப்பலை இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{2d}{\sqrt{3}u}$ எனக் காட்டுக.

(ii) படகு பூமி தொடர்பாக வடக்கிலிருந்து கிழக்கிற்குக் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஐ ஆக்கும் திசையில் செல்லுமெனின், கப்பல் தொடர்பாகப் படகின் கதி $\frac{\sqrt{7}u}{2}$ எனக் காட்டி, கப்பலிற்கும் படகிற்குமிடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் $\frac{d}{2\sqrt{7}}$ எனக் காட்டுக.





Two graphs same direction – Less (5)

Seperate graphs only 10 marks

~~05~~

20

$\underline{\triangle OAG}$

$f = \dfrac{u}{\frac{1}{2}}$

$\therefore f = 2u$ (5)

$\triangle OAG \equiv \triangle DEF$

$\therefore DE = \dfrac{1}{2}$ (5)

சரிவகம் $OEFG$ இன் பரப்பளவு = 140 (5)

$\dfrac{1}{2}(4+3)u = 140$ (5)

$\therefore u = 40$

$\therefore f = 80$ (5)

25

$\triangle BHC$

$2f = \dfrac{V}{T} \Rightarrow 160 = \dfrac{V}{T}$ (5)

$\triangle ECH$

$f = \dfrac{V}{CE} \Rightarrow 80 = \dfrac{V}{CE}$ (5)

$\therefore CE = 2T$

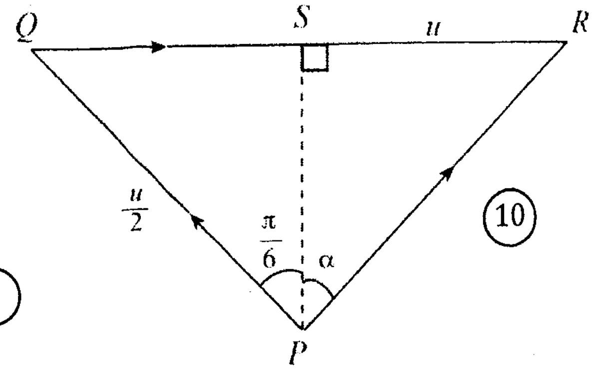
$\therefore 3T = 3\ ,\ T = 1$ (5) மேலும் $V = 160$

$a = \triangle BHE$ இன் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} \times 3 \times 160$

$= 240$ (5)

25

(b) $\mathbf{V}(S, E) = \leftarrow u$ (5)



(i) $\mathbf{V}(B, E) = \frac{u}{2}$ ↖ $\frac{\pi}{6}$ (5)

$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$ (5)

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$

no need to Relative graph

$QS = \frac{u}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{u}{4}$

$\therefore\ SR = \frac{3u}{4}$

$SP = \frac{u}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}u}{4}$

$\tan\alpha = \frac{SR}{SP} = \frac{3u}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}u} = \sqrt{3}$ (5) + (5)

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$ (5)

∴ படகு கப்பலை இடை மறிக்கலாம்

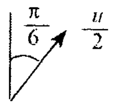
40

$Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2}$

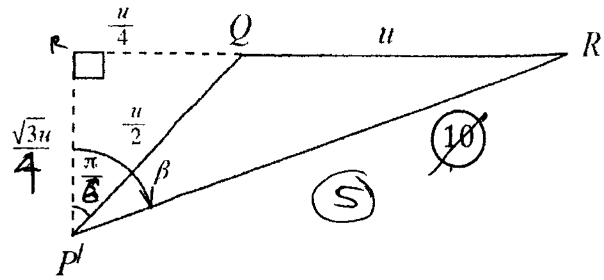
$\therefore\ PR = \frac{\sqrt{3}\,u}{2}$ (5)

$t = \frac{d}{PR} = \frac{2d}{\sqrt{3}\,u}$ (5)

10

(ii) $\mathbf{V}(B, E) =$ 

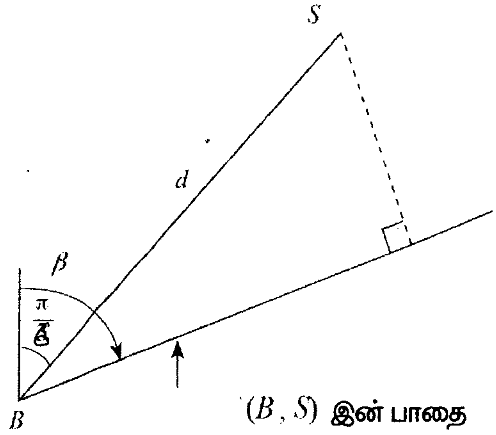
(5)



$$\mathbf{V}(B, S) = \mathbf{V}(B, E) + \mathbf{V}(E, S)$$

$$= \overrightarrow{P^{l}Q} + \overrightarrow{QR}$$

$$= \overrightarrow{P^{l}R}$$



(B, S) இன் பாதை

வேக முக்கோணியிலிருந்து

$$\sin\beta = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

மிகக் குறுகிய தூரம் $= d\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$ (5)

$$= d\left(\sin\beta\cos\frac{\pi}{3} - \cos\beta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ (5)

$$= d\left(\frac{5}{4\sqrt{7}} - \frac{3}{4\sqrt{7}}\right)$$

$$= \frac{d}{2\sqrt{7}}$$ (5)

30

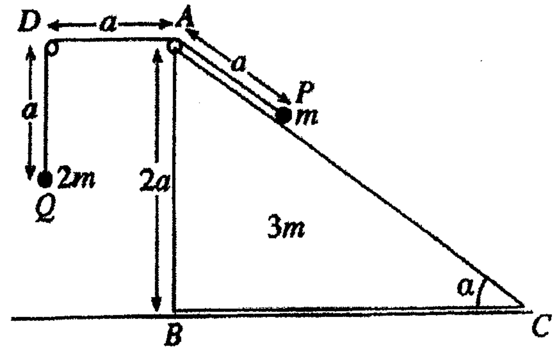
$$P'R^2 = \left(\frac{5u}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}u}{4}\right)^2$$

$$= \frac{25u^2 + 3u^2}{16}$$ (10)

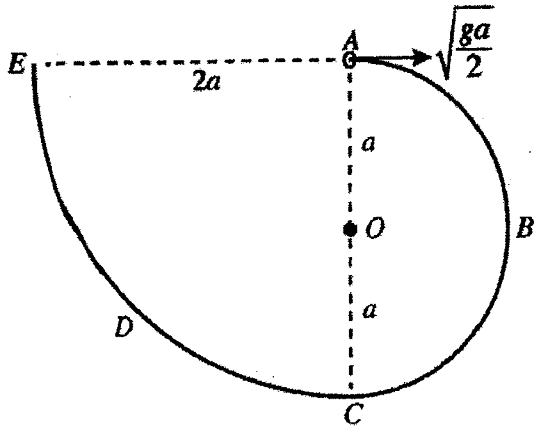
$$= \frac{7u^2}{4}$$

$$P'R = \frac{\sqrt{7}u}{2}$$

12. (*a*) உருவில் முக்கோணி ABC ஆனது $A\hat{C}B = \alpha$, $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2a$ ஆகவுள்ளதும் BC ஐக் கொண்ட முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது வைக்கப்பட்ட திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ளதுமான நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டாகும். கோடு AC ஆனது அதனைக் கொண்டுள்ள முகத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோடாகும். புள்ளி D ஆனது AD கிடையாக இருக்குமாறு ABC இன் தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். A, D ஆகியவற்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள இரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிகளுக்கு மேலாகச் செல்லும் நீளம் $3a$ ஐ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் இரு நுனிகளுடனும் முறையே $m, 2m$ என்னும் திணிவுகளை உடைய P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு துணிக்கை P ஆனது AC மீது பிடித்து வைக்கப்பட்டு $AP = AD = DQ = a$ ஆக இருக்குமாறு துணிக்கை Q சுயாதீனமாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை Q நிலத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



(*b*) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஓர் ஒப்பமான மெல்லிய கம்பி $ABCDE$ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பகுதி ABC ஆனது மையம் O ஐயும் ஆரை a ஐயும் கொண்ட ஓர் அரைவட்டமும் பகுதி CDE ஆனது மையம் A ஐயும் ஆரை $2a$ ஐயும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் கால் பகுதியும் ஆகும். A, C ஆகிய புள்ளிகள் O இனூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலும் கோடு AE கிடையாகவும் உள்ளன. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய ஒப்பமான மணி P ஆனது A இல் வைக்கப்பட்டு, அதற்குக் கிடையாக ஒரு வேகம் $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ தரப்படும் அதே வேளை அது கம்பி வழியே இயங்கத் தொடங்குகின்றது.

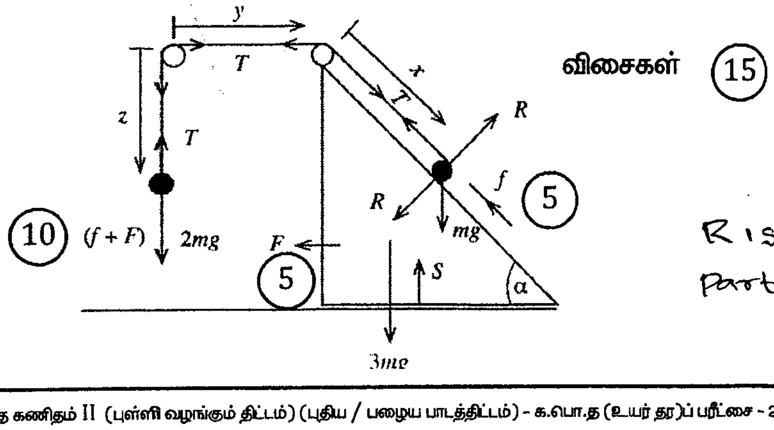


$\overrightarrow{OP}$ ஆனது $\overrightarrow{OA}$ உடன் ஒரு கோணம் $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ ஐ ஆக்கும்போது மணி P இன் கதி v ஆனது $v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த தானத்தில் கம்பியிலிருந்து மணி P மீதுள்ள மறுதாக்கத்தைக் கண்டு, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ ஆகவுள்ள புள்ளியை மணி P கடக்கும்போது அது அதன் திசையை மாற்றுமெனக் காட்டுக.

E இல் மணி P கம்பியிலிருந்து வெளியேறுவதற்குச் சற்று முன்னர் அதன் வேகத்தை எழுதி, அக்கணத்தில் கம்பியின் மூலம் மணி P மீது உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(*a*)



விசைகள் (15)

$x + y + z$ = மாறிலி

$\ddot{z} = -\ddot{x} - \ddot{y}$

$= f + F$

R is missing — Less (5)

Part of R miss →

$\underline{F} = m\underline{a}$ ஐப் பிரயோகிக்கும் போது

(2m) ↓ இற்கு $2mg - T = 2m(f + F)$ (10) (10/0)

(m) ↖ இற்கு $T - mg \sin\alpha = m(f + F\cos\alpha)$ (10) (10/0)

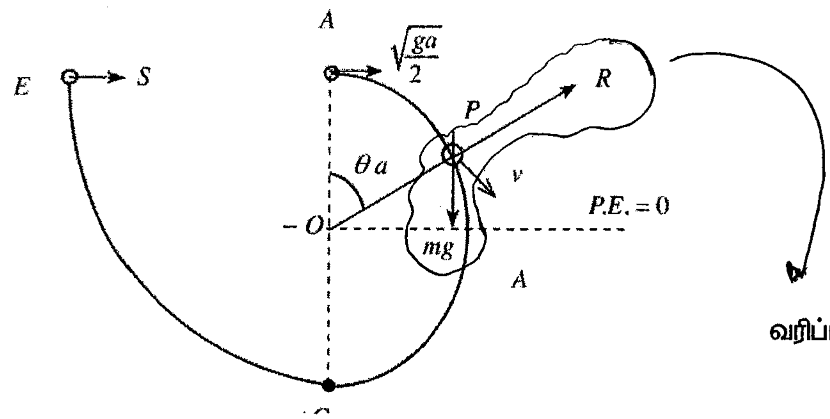
((m) (3m)) ← ஆகியவற்றுக்கு $T = 3mF + m(F + f\cos\alpha)$ (15) (15/0)

(2m) இற்கு ↓ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = \frac{1}{2}(f + F)t^2$ இங்கு t ஆனது எடுக்கும் நேரமாகும் (10)

80

(b)



வரிப்படம் (10)

P.E + K.E. + equation
(5) (5) (5)

சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டினைப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}m\left(\frac{ga}{2}\right) + mga$$

$$2v^2 + 4ga\cos\theta = 5ga$$

$$v^2 = \frac{ga}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

30

வட்ட இயக்கத்திற்கு $\underline{F} = m\underline{a}$

$$R - mg\cos\theta = -m\frac{V^2}{a} \quad (10)$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{mg}{2}(5 - 4\cos\theta) \quad (5)$$

$$= mg(6\cos\theta - 5)$$

R=0 than
and = 46

$0 < \theta < \alpha\ ; R > 0\ ;\ \alpha < \pi\ ;\ R < 0$ இங்கு $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ (5)

இதிலிருந்து, மணி புள்ளி $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ கடக்கும் போது மறுதாக்கம் அதன் திசையை மாற்று கின்றது

20

E இல் வேகம் W எனக் கொள்வோம்.

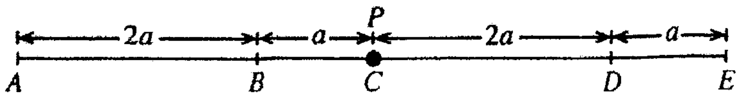
A தொடக்கம் E வரைக்கும் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டைப் பிரயோகிக்கும் போது $w = \sqrt{\frac{ga}{2}} \uparrow$ (10)

$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ (5) ஐப் பிரயோகிக்கும் போது

$$S = \frac{mw^2}{2a} = \frac{m\left(\sqrt{\frac{ga}{2}}\right)^2}{2a} = \frac{mg}{4}$$ (5)

20

13. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது A, B, C, D, E என்னும் புள்ளிகள் அதே வரிசையில்

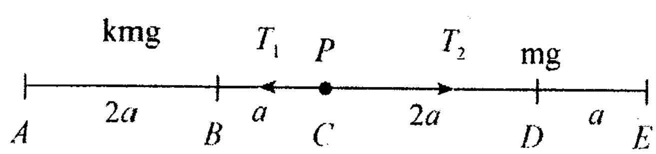


ஒரு நேர்கோட்டில் $AB = 2a, BC = a, CD = 2a, DE = a$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளன. இயற்கை நீளம் $2a$ ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு kmg ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி A உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இயற்கை நீளம் a ஐயும் மீள்தன்மை மட்டு mg ஐயும் உடைய வேறோர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி புள்ளி E உடனும் மற்றைய நுனி துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P ஆனது C இல் பிடித்து வைக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படும்போது அது நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இப்போது துணிக்கை P ஆனது புள்ளி D ஐ அடையும் வரைக்கும் இழை AP இழுக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. D தொடக்கம் B வரைக்கும் P இன் இயக்கத்திற்கான சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{3g}{a}x = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $CP = x$ ஆகும். சூத்திரம் $\dot{x}^2 = \frac{3g}{a}(c^2 - x^2)$ ஐப் பயன்படுத்தித் துணிக்கை P ஆனது B ஐ அடையும்போது அதன் வேகம் $3\sqrt{ga}$ எனக் காட்டுக; இங்கு c ஆனது வீச்சமாகும். B ஐ அடையும்போது துணிக்கை P இற்கு ஒரு கணத்தாக்கு, அக்கணத்தாக்கிற்குச் சற்றுப் பின்னர் P இன் வேகம் $\overrightarrow{BA}$ இன் திசையில் $\sqrt{ag}$ ஆக இருக்குமாறு, தரப்படுகின்றது.

B ஐக் கடந்த பின்னர் கணநிலை ஓய்வுக்கு வரும் வரைக்கும் P இன் இயக்கத்தின் சமன்பாடு $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = 0$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு $DP = y$.

D இல் தொடங்கித் துணிக்கை P இரண்டாம் தடவை B ஐ அடைவதற்கு எடுக்கும் மொத்த நேரம் $2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$ எனக் காட்டுக.



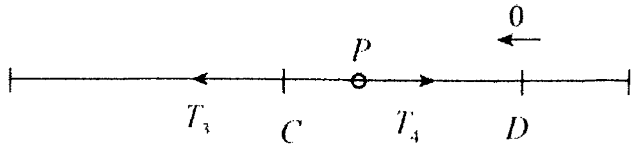
P ஆனது C இல் நாப்பத்தில் உள்ளது.

$\therefore T_1 - T_2 = 0$ (5)

$\therefore k\text{mg}.\frac{a}{2a} = mg.\frac{2a}{a}$ (10)

$\therefore k = 4$ (5)

20



(P) $\rightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ இற்கு

$-T_3 + T_4 = m\ddot{x}$

$\therefore -4mg.\dfrac{(a+x)}{2a} + mg.\dfrac{(2a-x)}{a} = m\ddot{x}$ (10)

(5) (5)

அப்போது $\dfrac{g}{a}\{-2a-2x+2a-x\} = \ddot{x}$

$\therefore \ddot{x} + \dfrac{-3g}{a}x$ (5)

$\therefore \ddot{x} + \dfrac{-3g}{a}x = 0$

இது $-a \le x \le 2a$ இற்கு வலிதாகும். **20**

இந்த எ. இ. இ. இற்கு மையம் C உம் $x = 2a$ ஆக இருக்கும் போது $\dot{x} = 0$ உம் ஆகும். (5)

இந்த எ. இ. இ. இன் வீச்சம் $2a$ ஆகும். (5)

$\therefore \dot{x}^2 = \dfrac{3g}{a}\left(4a^2 - x^2\right)$ (5)

$B\ (x = -a)$ இல் கதி V எனக் கொள்வோம்.

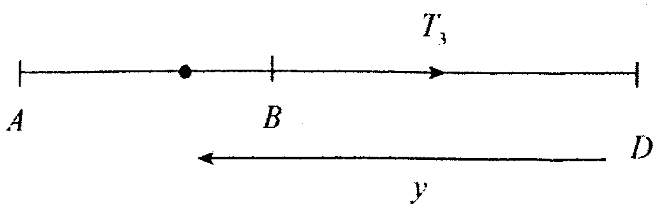
அப்போது $v^2 = \dfrac{3g}{a}\left(4a^2 - a^2\right)$ (5)

$= 9ga$

$\therefore v = 3\sqrt{ga}$ (5)

$\therefore P$ ஆனது முதல் தடவை B ஐ அடையும் போது வேகம் $3\sqrt{ga} \leftarrow$ **25**

கணத்தாக்கு காரணமாகக் கணத்தாக்கிற்குச் சற்றுப் பின்னர் வேகம் $\sqrt{ga}$



$-T = m\ddot{y}$ (5)   F=ma

$-mg — = m\ddot{y}$ (5)

$\therefore \ddot{y} = —— y$

அல்லது $\ddot{y} + \frac{8}{a} y = 0$ (5)   15   25

இந்த எ. இ. இ. இன் மையம் D ஆகும். (5)

வீச்சம் C எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\dot{y}^2 = \frac{g}{a}\left(c^2 - y^2\right)$

$y = 3a$ ஆக இருக்கும் போது $\dot{y} = \sqrt{ga}$ ஆகையால், (5)

$ga = \frac{g}{a}\left(c^2 - 9a^2\right)$ (5)

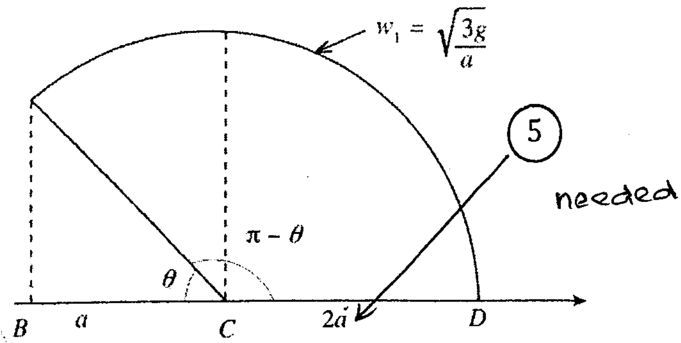
$\therefore c^2 = 10a^2$

$\therefore c = \sqrt{10}a$ (5)

$3a < \sqrt{\underbrace{10a}_{c}} < 5a$ ஆகையால், துணிக்கை P ஆனது B இற்கும் A இற்குமிடையே உள்ள ஒரு புள்ளி F இல் கணநிலை ஓய்வுக்கு வரும்

20

D இயிலிருந்து B இற்கு எடுத்த நேரம் τ_1 எனக் கொள்வோம்.

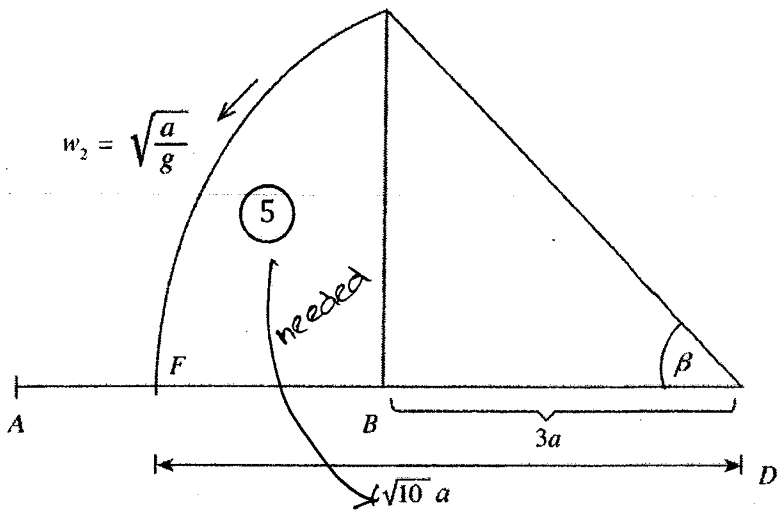


$\sqrt{\frac{3g}{a}}\,\tau_1 = \pi - \theta,$ (5)   இங்கு $\cos\theta = \frac{a}{2a}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (5)

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{a}{3g}} \times \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a}{g}} \quad (5)$$



B இலிருந்து F இற்கு எடுத்த நேரம் τ_2 எனக் கொள்வோம்.

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\tau_2 = \beta \quad (5), \quad \cos\beta = \frac{3a}{\sqrt{10}a}$$

$$\therefore \tau = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \quad (5) \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

F இலிருந்து B இற்கு எடுத்த நேரம் τ_3 எனக் கொள்வோம். (இரண்டாம் தடவை B இற்கு வருதல்)

$$\tau_3 = \tau_2$$

$\therefore$ தேவையான நேரம் $= \tau_1 + 2\tau_2$ (5)

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\} \quad (5)$$

45

14. (*a*) **a, b ஆகியன இரு அலகுக் காவிகள் எனக் கொள்வோம்.**

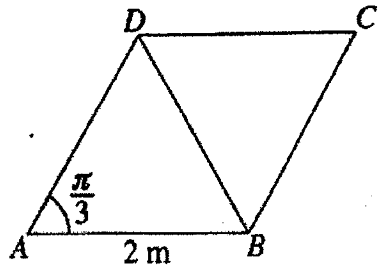
ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய மூன்று புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $12\mathbf{a}, 18\mathbf{b}, 10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ ஆகியவற்றை **a, b** ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க.

A, B, C ஆகியன ஒரேகோட்டிலுள்ளனவென உய்த்தறிந்து, $AC : CB$ ஐக் காண்க.

$OC = \sqrt{139}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) $ABCD$ ஆனது $AB = 2$ m ஆகவும் $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் உள்ள ஒரு சாய்சதுரமாகும். AD, BA, BD, DC, CB ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே 10 N, 2 N, 6 N, P N, Q N பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் பருமன் 10 N எனவும் அதன் திசை BC இற்குச் சமாந்தரமாக B இலிருந்து C இற்கான திசை எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. P, Q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
மேலும், விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோடானது நீட்டப்பட்ட BA ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து A இற்குள்ள தூரத்தையும் காண்க.



இப்போது விளையுள் விசை A, C ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லுமாறு இடஞ்சுழிப் போக்கில் தாக்கும் திருப்பம் M Nm ஐக் கொண்ட ஓர் இணையும் ஒவ்வொன்றும் பருமன் F N ஐ உடையனவும் CB, DC ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் தாக்குவனவுமான இரு விசைகளும் தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றன. F, M ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \quad (5)$$
$$= 10\underline{a} + 3\underline{b} - 12$$
$$= -2\underline{a} + 3\underline{b} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \quad (5)$$
$$= 18b - (10a + 3b) = -10a + 15b \quad (5)$$

20 ~~45~~

$$\overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{AC} \quad (5)$$

$\therefore$ A, B, C ஆகியன ஒரேகோட்டிலுள்ளன. (5) colinear

அதே வேளை $AC : CB = 1 : 5$ (5)

15

$OC = \sqrt{139} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = 139$ (5)

$(10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (10\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 139$ (5)

$100|\mathbf{a}|^2 + 60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9|\mathbf{b}|^2 = 139$ (5)

$60\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 30$

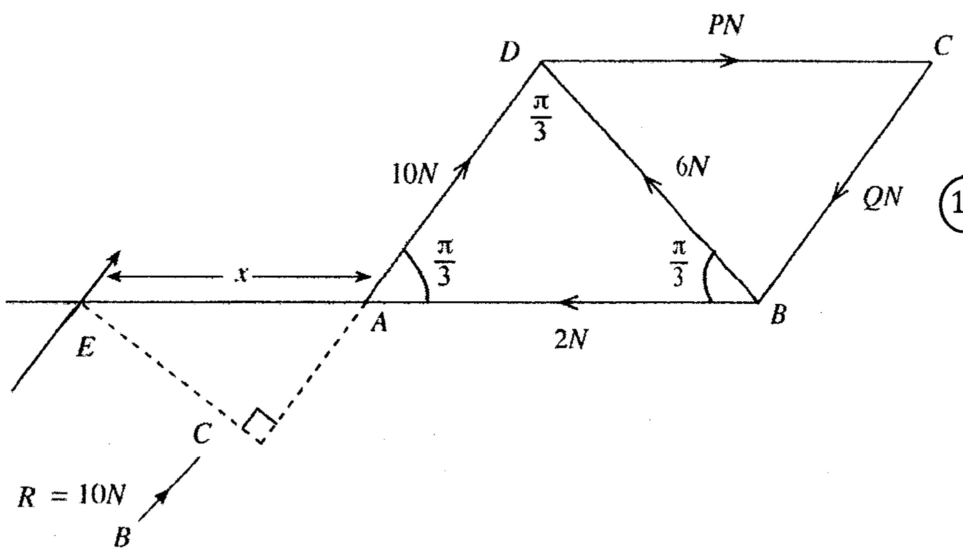
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}$ (5)

$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos A\hat{O}B = \frac{1}{2}$ (5)

$\therefore A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ (5)

30

(b)



(10) / 0

$\uparrow\ 10 \sin \frac{\pi}{3} = 10 \sin \frac{\pi}{3} - Q \sin \frac{\pi}{3} - 6 \sin \frac{\pi}{3}$ (10) ← for one mistake deduct -5

$\therefore Q = 6$ (5)

$\rightarrow\ 10 \cos \frac{\pi}{3} = P - 2 - 6 \cos \frac{\pi}{3} - 6 \cos \frac{\pi}{3} + 10 \cos \frac{\pi}{3}$ (10)

$\therefore P = 8$ (5)

40

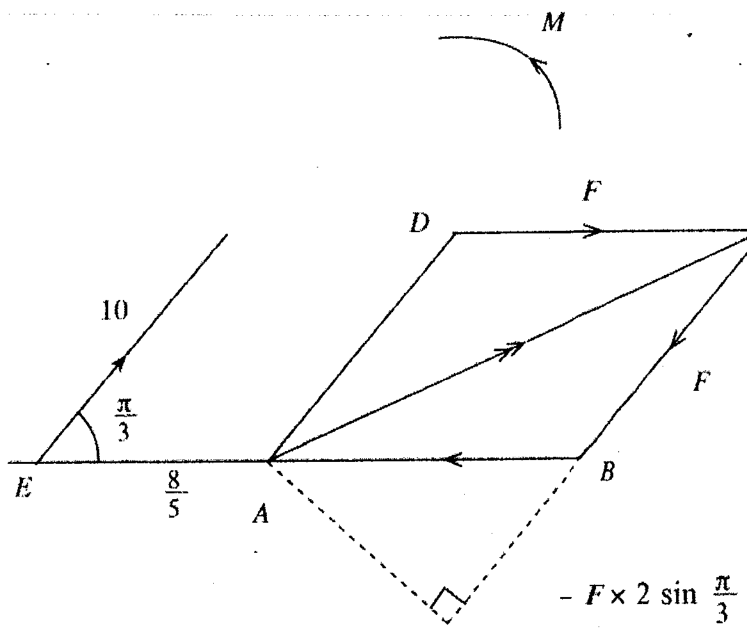
$E \curvearrowright \quad 10x \sin\frac{\pi}{3} - 6x\ (2+x)\sin\frac{\pi}{3} - 8x2\sin\frac{\pi}{3} + 6\,(2+x)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10)

$10x\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

$x = \frac{8}{5}\ m$ (5)

with wrong P & Q
If this is correct
give 10

15



$A \curvearrowleft \quad -10 \times \frac{8}{5}\sin\frac{\pi}{3} + M - F \times 2\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (10)/(0)

$M = F \times 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (5)

$C \curvearrowleft \quad M - 10\left(2+\frac{8}{5}\right)\sin\frac{\pi}{3} = 0$ (5)

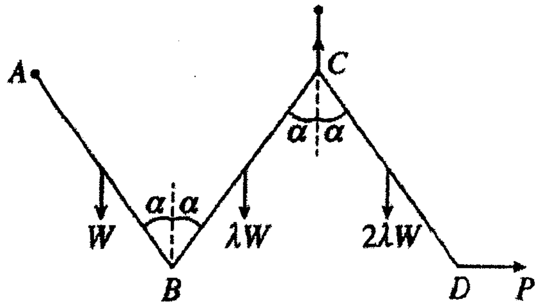
$M = 10 \times \frac{18}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 18\sqrt{3}$ (5)

$F = \dfrac{18\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5.$ (5)

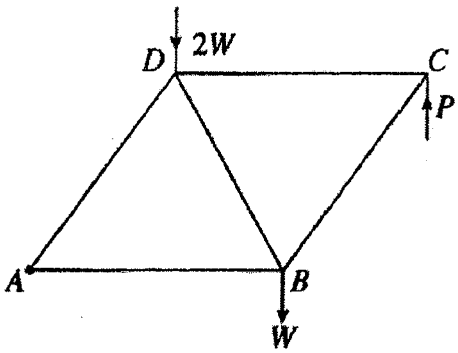
30

15. (a) ஒவ்வொன்றினதும் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீரான கோல்கள் B, C ஆகிய முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC, CD ஆகிய கோல்களின் நிறைகள் முறையே $W, \lambda W, 2\lambda W$ ஆகும். முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கோல்கள், மூட்டு C இலும் C இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலும் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினாலும் முனை D இற்குப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை P இனாலும், A, C ஆகியன ஒரே கிடை மட்டத்திலும் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் ஒரு கோணம் α ஐ ஆக்குவனவாகவும் இருக்குமாறு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. $\lambda = \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.



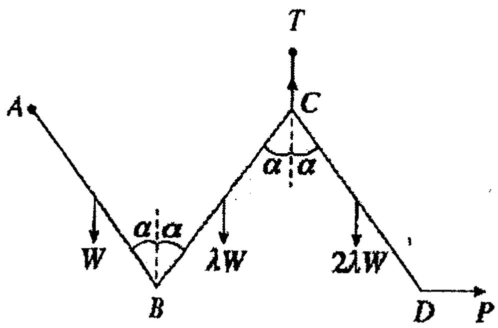
மேலும், B இல் CB இனால் AB மீது உஞற்றப்படும் விசையின் கிடைக் கூறும் நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே $\frac{W}{3}\tan\alpha$, $\frac{W}{6}$ எனவும் காட்டுக.

(b) அருகே உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமுள்ளனவும் A, B, C, D ஆகியவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டனவுமான AB, BC, CD, DA, BD ஆகிய இலேசான கோல்களினால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. B, D ஆகியவற்றில் முறையே $W, 2W$ என்னும் சுமைகள் உள்ளன. சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, உருவிற் காட்டியவாறு C இல் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P இனால் AB கிடையாக இருக்க நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. P இன் பெறுமானத்தை W இற் காண்க.



போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிட்டுக் காண்க.

CD இற்கு V பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது



$C\curvearrowright$ $2\lambda Wa\sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0$ (5)

$\therefore\ P = \lambda W\tan\alpha$ (5)

BC, CD ஆகியவற்றுக்கு B பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

$B\curvearrowright$ $\lambda Wa\sin\alpha - T\,2a\sin\alpha + 2\lambda W\,3a\sin\alpha = 0$ (10)

$\therefore\ T = \frac{7}{2}\lambda W$ (5)

AB, BC, CD ஆகியவற்றுக்கு A பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

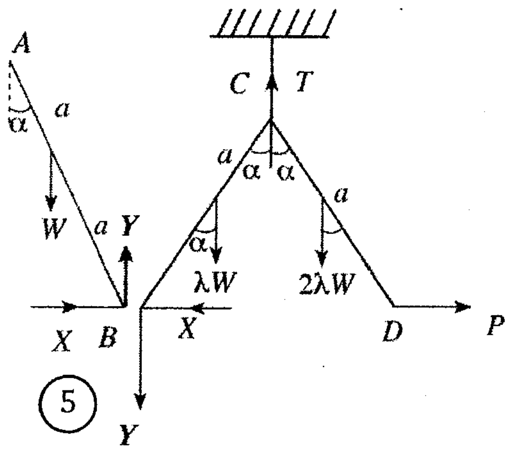
$$A \curvearrowright \quad Wa\sin\alpha + \lambda W\,3a\sin\alpha - T\,4a\sin\alpha + 2\lambda W\,5a\sin\alpha - P\,2a\cos\alpha = 0 \quad (10)$$

$$W\sin\alpha + 13\lambda W\sin\alpha - 14\lambda W\sin\alpha - \lambda W\tan\alpha\,2\cos\alpha = 0 \quad (5)$$

$$1 - \lambda - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \quad (5)$$

30



BC, CD ஆகியவற்றுக்கு

$$\uparrow \quad Y + 3\lambda W - T = 0$$

$$\therefore Y = \frac{7}{2}\lambda W - 3\lambda W \quad (5)$$

$$= \frac{\lambda W}{2}$$

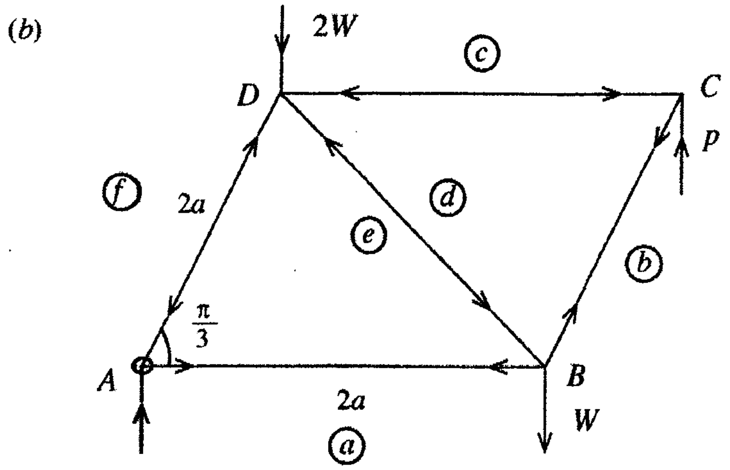
$$= \frac{W}{6}$$

$$\leftarrow \quad X - P = 0 \quad (5)$$

$$\therefore X = \frac{1}{3}W\tan\alpha$$

15

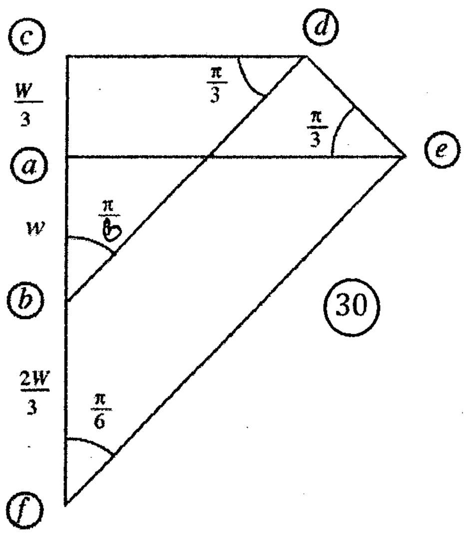
(b)



$\overset{\curvearrowright}{A}$ $2Wa + W\,2a - P\,3a = 0$

$\therefore\ P = \dfrac{4W}{3}$ (10)

10



(ஒவ்வொரு மூட்டிற்கும் 10)

30

கோல்	இழுவை	உதைப்பு	
AB	$\dfrac{5\sqrt{3}\,W}{9}$	–	(5) + (5)
BC	$\dfrac{8\sqrt{3}\,W}{9}$	–	(5) + (5)
CD	–	$\dfrac{4\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)
DA	–	$\dfrac{10\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)
BD	–	$\dfrac{2\sqrt{3}\,W}{9}$	(5) + (5)

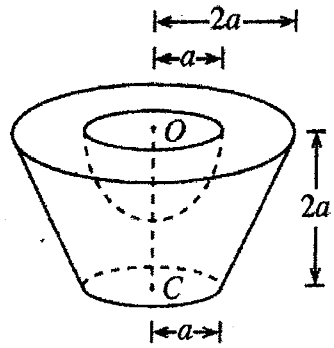
50

16. (i) அடியின் ஆரை r ஆகவும் உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{h}{4}$ இல் உள்ளது எனவும்

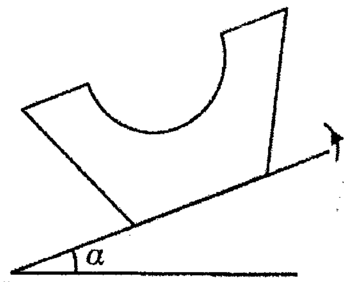
(ii) ஆரை r ஆகவுள்ள ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{3r}{8}$ இல் உள்ளது எனவும்

காட்டுக.

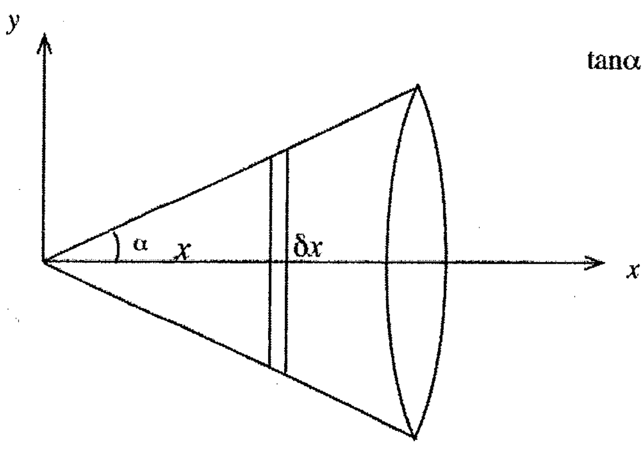
அடியின் ஆரை $2a$ ஆகவும் உயரம் $4a$ ஆகவும் உள்ள ஒரு சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டிலிருந்து ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தை அகற்றிச் செய்யப்பட்டுள்ள ஓர் உரல் S அருகே உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அடித்துண்டினது மேல் வட்ட முகத்தின் ஆரை $2a$ உம் மையம் O உம் கீழ் வட்ட முகத்தின் ஆரை a உம் மையம் C உம் ஆகும். அடித்துண்டின் உயரம் $2a$ ஆகும். அகற்றப்பட்ட திண்ம அரைக்கோளத்தின் ஆரை a உம் மையம் O உம் ஆகும். உரல் S இன் திணிவு மையமானது O இலிருந்து தூரம் $\frac{41}{48}a$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.



ஒரு கரடான கிடைத் தளத்தின் மீது உரல் S அதன் கீழ் வட்ட முகம் அத்தளத்தைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது தளம் மெதுவாக மேல்நோக்கி ஒருசரிக்கப்படுகின்றது. உரலுக்கும் தளத்துக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் 0.9 ஆகும். $\alpha < \tan^{-1}(0.9)$ எனின், உரல் நாப்பத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக; இங்கு α ஆனது கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வாகும்.



சீரான திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பு



$\tan\alpha = \frac{r}{h}$

சமச்சீருக்கேற்ப திணிவு மையம் ஒ- அச்சு மீது உள்ளது. (5)

$\delta m = \pi\left(x\tan\alpha\right)\delta x\,\rho$; இங்கு ρ ஆனது அடர்த்தியாகும்.

30

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\ \rho x^2 . x\, dx \ (5)}{\int_0^h \pi\tan^2\alpha\ \rho x^2\, dx \ (5)}$$

$$= \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h \ (5)}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h \ (5)}$$

$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

∴ அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $= h - \frac{3h}{4}$

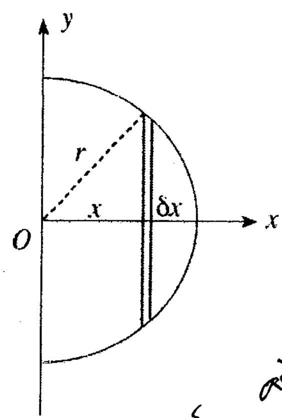
$= \frac{h}{4}$ (5)

30

(ii) சீரான திண்ம அரைக்கோளம்

சமச்சீருக்கேற்பத் திணிவு மையம் X - அச்சு மீது உள்ளது. (5)

$\delta m = \pi (r^2 - x^2)\, \delta x\, \sigma,$



இங்கு σ ஆனது அடர்த்தியாகும்.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma x\, dx \ (5)}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma\, dx \ (5)}$$

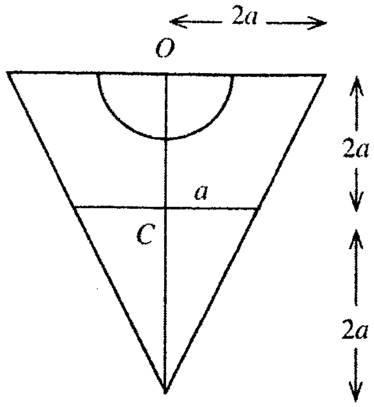
$$= \frac{\left.\left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^r \ (5)}{\left.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^r \ (5)}$$

$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

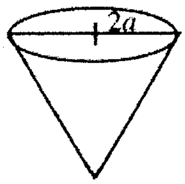
$$= \frac{3r}{8} \ (5)$$

no ρ or σ at least at one place deduct 5

30



அடர்த்தி σ

பொருள்	திணிவு	0 இலிருந்து தூரம் ↓
	$\frac{16}{3}\pi a^3\rho$ (5)	a (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{5a}{2}$ (5)
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ (5)	$\frac{3a}{8}$ (5)
	$4\pi a^3\rho$ (5)	$\bar{x}$

சமச்சீருக்கேற்பத் திணிவு மையம் சமச்சீர் அச்சு மீது உள்ளது. (5)

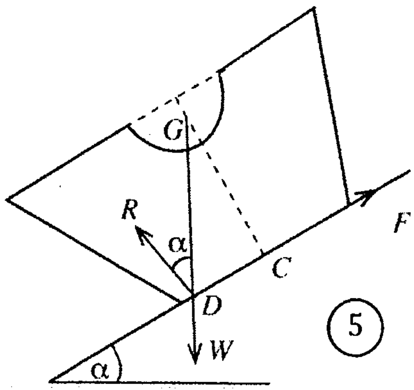
$$4\pi a^3\rho\,\bar{x} = \frac{16}{3}\pi a^3\rho a - \frac{2}{3}\pi a^3\rho\,\frac{5a}{2} - \frac{2}{3}\pi a^3\rho a\,\frac{3a}{8}$$ (5) (20) →

one mistake less (5)
2 mistakes less (10)

$$4\bar{x} = \frac{16}{3}a - \frac{5a}{2} - \frac{a}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{41a}{48}$$ (5)

65



வழுக்குவதைத் தடுப்பதற்கு

$\mu \geq \tan\alpha$

ஆகவே $0.9 \geq \tan\alpha$

அ - து $\alpha \leq \tan^{-1}(0.9)$

கவிழ்ந்து விழுவதைத் தடுப்பதற்கு

$CD < a$

ஆகவே $CG \tan\alpha < a.$

அ - து $\frac{55a}{48} \tan\alpha < a$ (10)

ஆகவே $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{48}{55}\right)$

25

17. (*a*) ஒரு குறித்த தொழிற்சாலையில் 50% ஆன உருப்படிகளைப் பொறி A உற்பத்தி செய்யும் அதே வேளை எஞ்சிய உருப்படிகள் B, C ஆகிய பொறிகளினால் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. A, B, C ஆகிய பொறிகளினால் உற்பத்தி செய்யப்படும் உருப்படிகளில் முறையே 1%, 3%, 2% ஆனவை குறைபாடுள்ளனவென அறியப்பட்டுள்ளது. ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த உருப்படி குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.018 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. B, C ஆகிய பொறிகளினால் உற்பத்தி செய்யப்படும் உருப்படிகளின் சதவீதங்களைக் காண்க.

ஓர் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த உருப்படி குறைபாடுள்ளதெனத் தரப்படும்போது அது பொறி A இனால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட உருப்படியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(*b*) ஒரு குறித்த தொழிற்சாலையின் 100 ஊழியர்கள் தமது வீடுகளிலிருந்து சேவை நிலையத்திற்குச் செல்வதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரங்கள் (நிமிடங்களில்) பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன:

எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்	ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை
0 – 20	10
20 – 40	30
40 – 60	40
60 – 80	10
80 – 100	10

மேலே தரப்பட்டுள்ள பரம்பலின் இடை, நியம விலகல், ஆகாரம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

பின்னர், வகுப்பாயிடை 80 – 100 இல் இருந்த எல்லா ஊழியர்களும் தொழிற்சாலைக்கு அண்மையில் வதிவதற்குச் சென்றனர். அதனால் வகுப்பாயிடை 80 – 100 இன் மீடிறன் 10 இலிருந்து 0 இற்கும் வகுப்பாயிடை 0 – 20 இன் மீடிறன் 10 இலிருந்து 20 இற்கும் மாறின.

புதிய பரம்பலின் இடை, நியம விலகல், ஆகாரம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

	A	B	C
உற்பத்தியின் நிகழ்தகவு	$\frac{1}{2}$	p	$\frac{1}{2} - p$
முறைபாடுகளின் நிகழ்தகவு	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$

D எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்த உருப்படி குறைபாடுள்ளதாக இருத்தல்

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$0.018 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{100} \times p + \frac{2}{100} \times \left(\frac{1}{2} - p\right) \quad (10)$$

$$3.6 = 1 + 6p + 2 - 4p$$

$$\therefore p = 0.3 \quad (5)$$

$\therefore$ பொறி B இனால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட உருப்படிகளின் சதவீதம் 30% ஆகும். (5)

பொறி C இனால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட உருப்படிகளின் சதவீதம் 20% ஆகும். (5)

25

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)\ P(A)}{P(D)} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{2}}{0.018} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{1}{100 \times 2}}{\frac{18}{1000}}$$

$$= \frac{5}{18} \quad (5)$$

25

எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்	f	நடுப்புள்ளி x (5)	$y = \frac{1}{10}x$	y^2	fy (5)	fy^2 (5)
0 - 20	10	10	1	1	10	10
20 - 40	30	30	3	9	90	270
40 - 60	40	50	5	25	200	1000
60 - 80	10	70	7	49	70	490
80 - 100	10	90	9	81	90	810
	100				$\sum fy = 460$ (5)	$\sum fy^2 = 2580$ (5)

$$\mu_y = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{460}{100} = \frac{23}{5} \quad (5)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \mu_y^2$$

$$= \frac{2580}{100} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 \quad (5)$$

$$= \frac{116}{25}$$

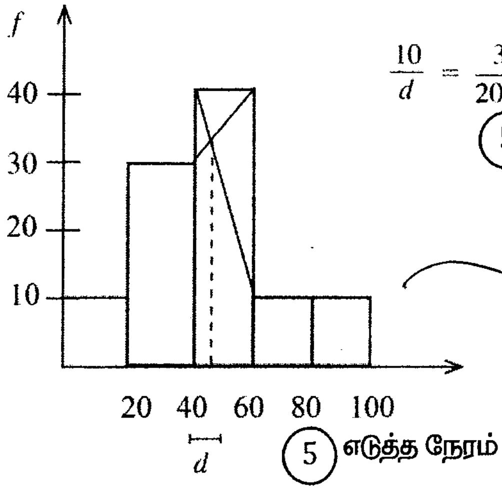
$$\therefore \sigma_y = \sqrt{\frac{116}{25}} \quad (5)$$

$$= \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

$\therefore$ இடை $\mu_x = 10\mu_y = 10 \times \frac{23}{5} = 46$ (5)

$\therefore$ நியம விலகல் $\sigma_x = 10\sigma_y = 10 \times \frac{2\sqrt{29}}{5} = 4\sqrt{29} \approx 21.54$ (5)

ஆகாரம்



$\frac{10}{d} = \frac{30}{20-d}$ (5) $\Rightarrow d = 5$ $\therefore$ ஆகாரம் $= 40 + d = 45$ (5)

no need diagram

65

(b) புதிய பரம்பலுக்கு

$$\mu_y = \frac{1}{100}\left[\sum_1^5 fy - f_1y_1 - f_5y_5 + 20 \times 1\right]$$

$$= \frac{1}{100}[460 - 10 - 90 + 20] \quad (5) \quad = \frac{380}{100}$$

$$= \frac{19}{5}$$

$\therefore$ புதிய இடை $= 10 \times \frac{19}{5} = 38$ (5)

$$\sigma_x^2 = \left[\sum_1^5 fy^2 - f_1y_1^2 - f_5y_5^2 + 20 \times 1^2\right] - \left(\frac{19}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{100}[2580 - 10 - 810 + 20] - \frac{361}{25} \quad (5)$$

$$= \frac{1780}{100} - \frac{361}{25}$$

$$= \frac{84}{25}$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \frac{\sqrt{84}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \quad (5)$$

$\therefore$ புதிய நியம விலகல் $= 10 \times \frac{2\sqrt{21}}{5} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ (5)

ஆகாரம் மாறுவதில்லை (10)

($\because$ ஆகார வகுப்பின் இரு பக்கங்களிலும் மீடிறன்கள் மாறுவதில்லை)

35

பழைய
பாடத்திட்டம்

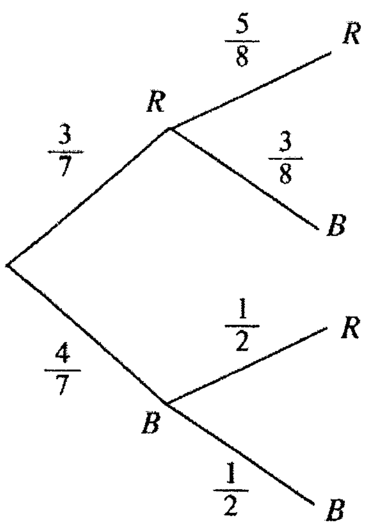
8. ஒரு பை A இல் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் 4 கறுப்புப் பந்துகளும் வேறொரு பை B இல் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பை A இலும் பை B இலும் உள்ள பந்துகள் நிறம் தவிர மற்றைய எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமனானவை. பை A இலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்பட்டு பை B இனுள் இடப்படுகின்றது. இப்போது பை B இலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்படுகின்றது.

(i) பை B இலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்பாக இருப்பதற்கான

(ii) பை A இலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து சிவப்பு எனத் தரப்பட்டிருக்கும்போது பை B இலிருந்து வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்து கறுப்பாக இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க.

A	B
3 சிவப்பு 4 கறுப்பு	4 சிவப்பு 3 கறுப்பு



(i) P (B இலிருந்து எடுத்த பந்து கறுப்பாக இருத்தல்) $= \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{56} + \frac{16}{56} = \frac{25}{56}$ (5)

(5) (5)

(ii) P (B இலிருந்து கறுப்பு / A இலிருந்து சிவப்பு) $= \dfrac{P\text{ (}B\text{ இலிருந்து கறுப்பும் }A\text{ இலிருந்து சிவப்பும்)}}{P\text{ (}A\text{ இலிருந்து சிவப்பு)}}$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times \frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}$$

$$= \frac{3}{8}$$ (10)

25

10. ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் ஒரு புள்ளிவிவரவியல் வினாத்தாளிற்குப் பெற்ற புள்ளிகளின் இடை, நியம விலகல் என்பன முறையே 40, 15 ஆகும். சூத்திரம் $t = \frac{1}{3}(70 + 2x)$ ஐப் பயன்படுத்தி இப்புள்ளிகள் உருமாற்றப்பட்டுள்ளன; இங்கு x ஆரம்பப் புள்ளியாகும். உருமாற்றப்பட்ட புள்ளிகளின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

உருமாற்றப்பட்ட புள்ளிகளின் இடையம் 55 ஆகும். ஆரம்பப் புள்ளிகளின் இடையத்தைக் காண்க.

$$\mu_t = \frac{1}{3}(70 + 2\mu_0) = \frac{1}{3}(70 + 80) = 50 \quad (5)$$

(5)

$$\sigma_t = \frac{2}{3}\,\sigma_0 = \frac{2}{3} \times 15 = 10 \quad (5)$$

$$M_t = \frac{1}{3}(70 + 2M_0) \quad (5)$$

$$55 = \frac{1}{3}(70 + 2M_0)$$

$$M_0 = \frac{95}{2} = 47.5$$

(5)

25