



ரோயல் கல்லூரி - கொழும்பு - 07

ROYAL COLLEGE - COLOMBO - 07

Grade 12 - Second Term Test - April 2018

தரம் 12 - இரண்டாம் தவணைப் பரீட்சை - சித்திரை 2018

Combined Mathematics I

இணைந்த கணிதம் I

பெயர் /சுட்டெண்:.....

தரம் : 12M-.....

நேரம் : இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

*பகுதி - A இல் எல்லா வினாக்களுக்கும் பகுதி - B இல் மூன்று வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக.

பகுதி - A

(01) $\sec \theta = p + \frac{1}{4p}$, ($p \neq 0$) என தரப்படின் $\sec \theta + \tan \theta$ இன் பெறுமானங்கள் $2p$ அல்லது $\frac{1}{2p}$ என காட்டுக.

(02) $A(b \cos \alpha, b \sin \alpha)$, $B(a \cos \beta, a \sin \beta)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு ஆனது AM , BM ஆகியவற்றுற்கான விகிதம் $b : a$ ஆக இருக்குமாறு புள்ளி $M(x, y)$ உற்பத்தியாகின்றது. $x + y \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 0$ என நிறுவுக.

(03). $(2 + y - x)$ ஆனது $ax^2 + cy^2 - 8x - 2y + bxy + 8$ இன் ஒரு காரணி எனின் a, b, c இன் பெறுமானங்களை காண்க. அத்துடன் மற்றைய காரணியையும் காண்க.

(04). $\frac{4x^3 - x + 2}{x(x+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக அடுக்குரைக்க.

(05). If $x, y, z > 0$ எனவும் $x + y + z = 1$ எனவும் கொள்வோம். $(1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz$ என காட்டுக..

(06). $\alpha, \beta \neq 0$ இற்கு $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 \beta$ என, தரப்படின, $x^2 + 2x \cot \beta + 1 = 0$ எனும் இருபடிசமன்பாடானது எப்போதும் மெய்யான மூலங்களை கொண்டிருக்கிறது என காட்டுக.



ரோயல் கல்லூரி - கொழும்பு - 07

ROYAL COLLEGE - COLOMBO - 07

Grade 12 - Second Term Test - April 2018

தரம் 12 - இரண்டாம் தவணைப் பரீட்சை - சித்திரை 2018

Combined Mathematics I

இணைந்த கணிதம் I

பகுதி - B

*முன்று வினாக்களுக்கு மட்டும் விடை எழுதுக.

1.

a) $a, b, c, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ஆக $f(x) = ax^2 + bx + c$ என கொள்வோம். $a > 0$, $a < 0$ இற்கு $y = f(x)$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைந்து உயர்வு இழிவுப் புள்ளிகளை தெளிவாக வகைகுறிக்க. $b, c \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) = x^2 - 2bx - 2c^2$, $g(x) = x^2 + 2cx - 2b^2$ ஆகும். $f(x)$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $\geq g(x)$ இன் உயர்வுப்பெறுமானம் எனும் சமனிலியை திருப்தியாக்கும் c இன் பெறுமானத்தை b இன் சார்பில் காண்க.

b) m, n என்பன $x^2 + 2\lambda x + \lambda + 2 = 0$ இன் மூலங்கள் ஆகும். இங்கு λ ஓர் மாறிலி. $(m - n)^2 = 4(\lambda^2 - \lambda - 2)$ என காட்டுக. இதிலிருந்து மூலங்களுக்கிடையேயான வித்தியாசம் 4 ஆகவுள்ள இருபடிச்சமன்பாட்டை உய்த்தறிக. $\lambda \neq -2$, ஆக இருக்கத்தக்கதாக $\frac{m^2}{n}, \frac{n^2}{m}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டை பெறுக.

c)

$\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{\lambda}{x-2} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ ஆகுமாறு மாறிலி λ பல்லுறுப்பி $f(x)$ என்பவற்றை காண்க. $f(x)$ ஐ $(x-1)$ இன் பல்லுறுப்பியாக எடுத்துரைக்க. இதிலிருந்து $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ இன் பகுதிப்பின்னங்களை காண்க.

2.

- a) முக்கோணி ABC இன் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகும். கோணம் BAC இன் கோண இருகூறாக்கியானது பக்கம் BC ஐ P இல் சந்திக்கின்றது. P இன் ஆள்கூறுகள் $(\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \frac{by_2+cy_3}{b+c})$ இனால் தரப்படும் என காட்டுக. BP இன் பருமனை a, b, c சார்பில் எழுதுக. அத்துடன் விகிதம் $AI:IP$ ஐ காண்க. இங்கு I என்பது கோணம் ABC இன் கோண இருகூறாக்கியும் AP யும் சந்திக்கும் புள்ளி ஆகும்.
இதிலிருந்து ABC இன் உள்வட்ட மையத்தின் ஆள்கூறுகள்

$$(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}) \text{ இனால் தரப்படும் என காட்டுக.}$$

$A = (1,2)$, $B = (5,2)$, $C = (5,5)$ எனின் முக்கோணி ABC இன் உள்வட்ட மையத்தின் ஆள்கூறுகளை காண்க.

- b) $1 \geq \frac{x^2+5}{6+x-x^2}$ எனும் சமனிலியை திருப்திபடுத்தும் x இன் பெறுமான வீச்சை காண்க.

- c) எல்லா $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, இற்கு $\frac{xy \log_{10}(xy)}{x+y} + \frac{yz \log_{10}(yz)}{y+z} = \frac{xz \log_{10}(xz)}{x+z}$ எனின் $x^x = y^y = z^z$ என காட்டுக.

3.

- a) நிறுவுக.

I. $(\tan 4A + \tan 2A)^2 - \tan^2 3A \tan^2 A = 2 \tan 3A \sec^2 A$.

II. $\frac{3+\cos 4\theta}{1-\cos 4\theta} = 2(\tan^2 \theta + \cot^2 \theta)$.

- b) $\sqrt{3} (\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ இன் பொதுத்தீர்வைக் காண்க.

- c) $(x) = \frac{3}{4} - \cos^2 x + \cos^4 x$, $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ இனை $f(x) = p + q \cos 4x$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க. இங்கு p, q என்பன துணியப்படவேண்டிய மாறிலிகளாகும். இதிலிருந்து $y = \frac{3}{4} - \cos^2 x + \cos^4 x$ இன் வரைபை $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ எனும் வீச்சில் வரைக. $k = \frac{3}{4} - \cos^2 x + \cos^4 x$ ஆயின் $y = k$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் k இன் பெறுமானங்களை காண்க.

- I. 4 தீர்வுகள் தொண்டிருத்தல்.
II. 2 தீர்வுகள் தொண்டிருத்தல்.
III. தீர்வுகள் இல்லாதிருத்தல்.

4.

a) வழக்கமான குறிப்பிட்டில் கூர்ங்கோண முக்கோணி ABC இற்கு கோசைன்நெறியை கூறி நிறுவுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ $(a + b + c)(b + c - a) = \lambda bc$ என தரப்படின் λ இன் வீச்சு $0 \leq \lambda \leq 4$ என காட்டுக.

b) யாதுமோர் முக்கோணி ABC இற்கு

I. $\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right) \sin 2A + \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right) \sin 2B + \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right) \sin 2C = 0$ என நிறுவுக

II. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$ எனின் முக்கோணி ABC ஆனது செங்கோண அல்லது இருசமபக்க முக்கோணி என காட்டுக.

c) If $A + B + C = \pi$ எனின்

$$\sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B) = 4 \sin \frac{1}{2}(B - C) \sin \frac{1}{2}(C - A) \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

என நிறுவுக.

*இறுதித்திருத்தங்கள் உள்ளடக்கப்படவுள்ளன.



ரோயல் கல்லூரி - கொழும்பு - 07

ROYAL COLLEGE - COLOMBO - 07

Grade 12 - Second Term Test - April 2018

தரம் 12 - இரண்டாம் தவணைப் பரீட்சை - சித்திரை 2018

Combined Mathematics II

இணைந்த கணிதம் II

பகுதி - B

* முன்று வினாக்களுக்கும் மட்டும் விடை எழுதுக

1.

a. பொலிஸ் ஒருவர் தன்னிலிருந்து x தூரத்தில் இருக்கும் திருடன் ஒருவனை அவதானிக்கின்றார். திருடனை பிடிக்கும் முகமாக ஆரம்ப வேகம் u வும் ஆர்முடுகல் f உடன் பொலிசார் ஓட ஆரம்பிக்கின்றார். அத்தருணம் திருடன் ஓய்விலிருந்து ஆர்முடுகல் g உடன் ஓடுகின்றான். $f \geq g$ எனின் அல்லது $f < g < f + \frac{u^2}{2g}$ எனின் பொலிசார் திருடனை பிடிக்கலாம் என காட்டுக. (இயக்கவியல் சமன்பாடுகளை மட்டும் உபயோகிக்க.)

b. மோட்டார் வண்டி A ஆனது ஆரம்ப வேகம் $2u$ உடனும் மாறா அமர்முடுகளுடனும் பயணிக்கின்றது. நேரம் t_1 இன் பின் புள்ளி P ஐ கடக்கும் போது அதன் வேகம் u ஆக குறைகின்றது. பின்னர் அதே மாறா வேகத்துடன் தொடர்ந்து பயணிக்கின்றது. மோட்டார் வண்டி A வேகம் u ஐ அடையும் அதே கணத்தில் மோட்டார் வண்டி B ஆனது புள்ளி P இல் ஓய்விலிருந்து A செல்லும் அதே திசையில் பயணத்தை ஆரம்பிக்கின்றது. B ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்கி நேரம் t_2 இற்கு பின் வேகம் ku ($k > 1$) ஐ பெறுகின்றது. பின் மாறா ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்குகின்றது. A, B இன் இயக்கத்திற்கான வேகநேர வரைபை ஒரே வரைபில் வரைக. இதிலிருந்து

$2k + \frac{1}{k} \leq 4 + \frac{3t_1}{t_2}$ எனின் B ஆனது A ஐ முந்தி செல்ல முடியாது என காட்டுக.

II. $t_1 = 2T, t_2 = T$ ஆகவும் $k \geq \frac{5 + \sqrt{23}}{2}$ எனின் மட்டும் B ஆனது A ஐ முந்தி செல்லும் என காட்டுக.

2.

a. $ABCDEF$ ஆனது பக்க நீளம் $2a$ மீற்றரை உடைய ஒழுங்கான அறுகோணி ஆகும். AB, BC, DC, DE, FE, FA ஆகியவற்றின் வழியே முறையே $R, 2P, 3P, 4P, Q, P$ நியூட்டன் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன.

I. Q, R இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் தொகுதியானது நாப்பத்தில் இருக்காது என காட்டுக.

II. இத்தொகுதி FD வழியே தாக்கும் ஒரு தனி விளையுளாக ஒடுங்குகின்றது எனின் Q, R இன்பருமனையும் திசையையும் P சார்பில் காண்க. மேலும் மேற்குறித்த விசை தொகுதியானது புள்ளி A இல் தாக்கும் விளையுள் விசைக்கும் இணைக்கும் சமவலுவானது என கருதப்படலாம் எனின் அவ் விசையின் விளையுளின் பருமனையும் இணையையும் காண்க.

b. $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகும். $BE:EC = 2:1, AF:FD = 1:2, DG:GH = 1:1:1$ என்ற விகிதத்தில் அமையுமாறு புள்ளிகள் E, F, G, H இணைகரத்தின் பக்கங்களில் அமைந்துள்ளன. AE, BF என்பன X இலும் AH, BG என்பன Y இலும் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டினால் $AX:XE, AY:YH$ ஆகியவற்றிற்கான விகிதங்களை காண்க. $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b, \hat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ என தரப்பட்டுள்ளது. $|a| = 2|b|$ எனின் கோணம் $X\hat{A}Y$ இன் பருமனை காண்க.

3.

a. ஆரை உச்சிக்கோணம் $\frac{\pi}{3}$ உடைய செவ்வட்ட பொள் கூம்பு அதன் உச்சி கீழே இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் அச்ச நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. திணிவு W ஐ உடைய கிரான கோல் கூம்பினுள் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கின்றது எனின் $\tan \theta = \cot 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cosec} 2\alpha$ என காட்டுக.

கோலில் தொழிற்படும் மறுதாக்கங்களை α சார்பில் காண்க.

b. இலேசான நீட்டமுடியாத இழை AB ஒன்றின் இரு முனைகளும் கிடையுடன் 60° சாய்ந்துள்ள சாய்தளம் ஒன்றில் A இற்கு மேல் B இருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையிலுள்ள இரு புள்ளிகள் C, D இல் முறையே $2W, W$ என்னும் திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டு C இற்கு கிடையாக $5\sqrt{3}W$ விசை பிரயோகிப்பதன் மூலம் இழை இறுக்கமாக இருக்க தொகுதி சமநிலையில் உள்ளது. C ஆனது D இற்கு மேல் உள்ளது. சமநிலையில் இழை AD சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை இழை BC ஆனது கிடையுடன் 60° அமைக்கின்றது. இழை CD இலுள்ள இழுவையையும் இழை CD கிடையுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

4.

a. ஒரு துணிக்கை u கதியுடன் θ எறியற் கோணத்தில் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகின்றது. இது O இன் மட்டத்திற்கு மேல் y உயரத்திலும் x கிடைத்தூரத்திலும் அமையும் புள்ளி $P \equiv (x, y)$ இற்கூடாக செல்கின்றது எனின் $y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2u^2} \sec^2 \theta$ எனக் காட்டுக.

m, n உயரமுடைய இரு சுவர்கள் எறியற் புள்ளியிலிருந்து முறையே n, m தூரத்தில் உள்ளன. ஒரு துணிக்கையை இரு சுவர்களையும் மட்டுமட்டாக தாண்டும் வகையில் எறியப்பட்டால் துணிக்கை அடைந்த கிடைவீச்சு $\frac{m^2 + mn + n^2}{m+n}$ இனால் தரப்படும் என காட்டுக.

b. வடக்கு நோக்கி வேகம் $u \text{ ms}^{-1}$ உடன் ஓடும் வீரன் ஒருவனுக்கு காற்றானாது வடக்கிலிருந்து கிழக்குகாக கோணம் θ நோக்கி வீசுவது போல் தோன்றுகிறது. இங்கு $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$ ஆகும். அதே வேளை வீரன் தெற்குநோக்கி அதே வேகத்தில் ஓடும் போது காற்றானாது கிழக்கிலிருந்து தெற்காக கோணம் θ வீசுவது போல தோன்றுகிறது. மேற்குறிப்பிட்ட இரு சந்தர்ப்பங்களுக்கும் பொருத்தமான வேக முக்கோணியை வரைக. இதிலிருந்து

I. காற்றின் வேகத்தை காண்க.

II. காற்றின் திசையானது தெற்கிலிருந்து மேற்காக கோணம் 2θ அமைக்கும் என காட்டுக.



ரோயல் கல்லூரி - கொழும்பு - 07

ROYAL COLLEGE - COLOMBO - 07

Grade 12 - Second Term Test - April 2018

தரம் 12 - இரண்டாம் தவணைப் பரீட்சை - சித்திரை 2018

Combined Mathematics II

இணைந்த கணிதம் II

பெயர் / சுட்டெண்:.....

தரம் : 12M-.....

நேரம் : இரண்டு மணித்தியாலங்கள்

*பகுதி - A இல் எல்லா வினாக்களுக்கும் பகுதி - B இல் முன்று வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக.

பகுதி - A

(01) தரையிலிருந்து முறையே x, y, z நிலைக்குத்து உயரத்தில் உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து முன்று துணிக்கைகள் ஒரே கணத்தில் முறையே u, v, w வேகங்களில் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. முன்று துணிக்கைகளும் ஒரே நேரத்தில் தரையை அடிக்குமாயின் $u(y - z) + v(z - x) + w(x - y) = 0$ என நிறுவுக.

(02). $(ci + j), (2i - j), (3i + 2j)$ ஆகிய தானக்காவிகளில் உள்ள புள்ளிகளில் முறையே $(5i + 6j), (ai - 4j), (-6i - bj)$ ஆகிய பருமனுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின் a, b இன் பெறுமானங்களை காண்க.

(03) $x-y$ தளத்தில் உற்பத்தி O ஐ குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே a, b ஆகும். BO, OA இல் முறையே புள்ளிகள் D, E என்பன $BD:DO = 2:1$, $OE:EA = 1:3$ என்ற விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது. $\overline{AD}, \overline{BE}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை a, b சார்பில் காண்க.
 AD, BE என்பன இடைவெட்டும் புள்ளி G எனின் G ஐ காண்பதற்கு தேவையான சமன்பாடுகளை மட்டும் பெறுக.

(04). ஓர் சீரற்ற கோல் AB ஆனது நிலைக்குத்து தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. அதன் கீழ் முனை A ஆனது கிடையுடன் α கோணம் அமைக்கும் ஒப்பமான சாய்தளம் ஒன்றின் மீதும் மேல் முனை B ஆனது ஒப்பமான நிலைக்குத்து சுவர் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் கிடையுடன் β கோணம் அமைக்குமாயின் கோலின் புவியீர்ப்பு மையமானது $AG:GB = \sin \alpha \sin \beta : \cos(\alpha + \beta)$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் என காட்டுக

(05). புள்ளி O சார்பாக எறியற் பாதையில் உள்ள புள்ளி ஒன்றின் ஆள்கூறுகள் (a, b) ஆகும். இதன் கிடைவீச்சு R எனின் எறியற் கோணம் α ஆனது $\tan \alpha = \frac{Rb}{a(R-a)}$ இனால் தரப்படும் என காட்டுக.

(06) சிறுவன் ஆற்றின் கரைகளுக்கு சமாந்தரமாக ஆற்றோட்டத்தின் திசையில் தூரம் d ஐ கடப்பதற்கு நேரம் t_1 எடுக்கின்றான். அதே தூரத்தை ஆற்றோட்டத்தின் எதிர் திசையில் கடப்பதற்கு நேரம் t_2 எடுக்கின்றான் எனின் ஆற்றின் வேகத்தை காண்க.