



**வட்டமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்துடன் இணைந்து
தொண்டைமாளாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்
முன்றாம் தவணைப் பரீட்சை - 2020**

Conducted by Field Work Centre, Thondaimanaru
In Collaboration with Provincial Department of Education
Northern Province

Third Term Examination - 2020

தரம் :- 12 (2021)

இணைந்த கணிதம் - A

மூன்று மணித்தியாலம் 10 நிமிடம்

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லாவினாக்களுக்கும் விடைஎழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் I

இணைந்த கணிதம் II

இறுதிப் புள்ளிகள்

8241

- 1) $f(x) = x^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2$ என்றும் இருபடிச் சார்பின் இழிவுப்புள்ளி (3,-4) எனின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

- 2) $y = 4x - x^2, y = |x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரம்படியாக வரைக. இதிலிருந்து சமனிலி $x(4-x) \geq |x|$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெயப்பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

3) $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ ஐப் பகுதிப்பின்புள்ளவர்களுக்கு. இதிலிருந்து $\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்புள்ளவர்களுக்கு.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2}$ ஐப் பெறுமானங்கணிக்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

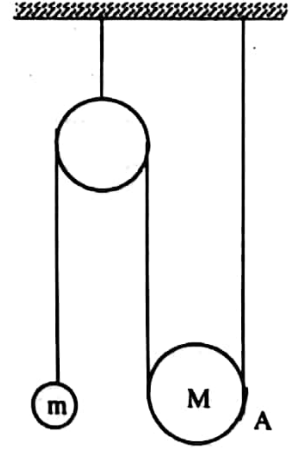
.....

.....

.....

5) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \tan^{-1}2$ என்றும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

- 6) படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு ஒரு இலேசான இழை M திணிவுடைய அசையும் கம்பி A ஊடாக சென்று m திணிவுள்ள துணிக்கையை காவுகிறது. இழை இறுக்கமாக ஓய்விலிருந்து விடப்படின் m இன் ஆர்முடுகலைக் காண்க. $M = 2m$ எனின் யாது நிகழும்.



7) A, B என்பவர்கள் முறையே 75 ms^{-1} , 60 ms^{-1} சீரான வேகங்களில் ஒரே திசையில் ஒரே நேர்கோட்டில் பயணிக்கின்றனர். ஆரம்பத்தில் இவர்களுக்கிடையாக தூரம் 300 m எனின் A, B என்பவர்களின் இயக்கத்திற்கான வேக நேர வரைபுகளை ஒரே படத்தில் வரைந்து A, B யைக்கடக்க எடுக்கும் நேரத்தைக்காண்க

.....

8) $a + b + c = 0$, $|a| = 1$, $|b| = 4$, $|c| = 2$ எனின் $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

.....

9) ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, Q என்ற விசைகளின் விளையுள் R ஆகும். P மாறாது Q இரட்டிக்கப்படின் விளையுள் 2R ஆகும். P மாறாது Q புறமாற்று செய்யப்படின் விளையுள் 2R. எனின் $\frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10) முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையம் H. P, Q, R என்ற விசைகள் முறையே \overline{HA} , \overline{HB} , \overline{HC} வழியே தாக்கி சமநிலையிலுள்ளன. $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**வடமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்துடன் இணைந்து
தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்
மூன்றாம் தவணைப் பரீட்சை - 2020**

Conducted by Field Work Centre, Thondaimanaru
In Collaboration with Provincial Department of Education
Northern Province
Third Term Examination - 2020

தரம் :- 12 (2021)

இணைந்த கணிதம் -B

11) a) α, β என்பன $x^2 - bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகும். $(\alpha^3 + \beta^3) = b^3 - 3bc$ எனக் காட்டுக. α^3, β^3 என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $x^2 - (b^3 - 3bc)x + c^3 = 0$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $(1 + \alpha^3), (1 + \beta^3)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

b) $f(x) \equiv x^2 + (\lambda + 2)x + 2\lambda$ என்க. $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) λ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக்காட்டுக.

(ii) $f(x) = 0$ இன் மூலங்களின் வித்தியாசம் 1 ஆக இருப்பின் λ இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

c) $g(x) \equiv x^3 - 3x + 5$ என்க. $g(x)$ ஐ $(x^2 - 3x + 2)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதி $(4x - 1)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $x^3 - 7x + 6$ ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

12) a) $x \neq 0$ இற்கு $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$ எனக் கொள்வோம். $x \neq 0$ இற்கு $f'(x) = -\frac{3(x^2 - 1)}{x^4}$ எனக்காட்டுக.

$x \neq 0$ இற்கு $f''(x) = \frac{6(x^2 - 2)}{x^5}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. அணுகுகோடுகள், திரும்பற்புள்ளிகள், விபத்திப்புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

b) மூடியற்ற ஒரு செவ்வட்ட உருளைக் கொள்கலமொன்று $729\pi \text{ m}^3$ கொள்ளளவைக் கொண்டிருக்குமாறு உருவாக்கப்பட வேண்டியுள்ளது. கொள்கலத்தின் வெளிமேற்பரப்பளவு இழிவாக இருப்பதற்கு அதன் ஆரையையும் உயரத்தையும் காண்க.

13) புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ இலிருந்து நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் $\frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து நேர்கோடுகள் $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்பன இடைவெட்டும் கோணங்களின் இரு சுழாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்.

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

சாய்சதுரம் ABCD இன் பக்கங்கள் AB, AD ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே

$4x - 3y - 5 = 0$, $y - 1 = 0$ ஆகும். \widehat{BAD} ஒரு விரிகோணமாகும். மேலும் BD ஆனது (3,4) என்னும் புள்ளியினூடு செல்கின்றது.

(i) மூலைவிட்டம் AC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) மூலைவிட்டம் BD யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(iii) பக்கங்கள் BC, CD ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14) a) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ எனவும் $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ எனவும் காட்டுக.

இதனைப்பயன்படுத்தி $\cos 2\theta - \sin 3\theta = 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1$ எனக்காட்டுக. இங்கு $t = \sin\theta$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ இற்கு $\cos 2\theta - \sin 3\theta = 0$ ஐத் தீர்க்க. இதிலிருந்து சமன்பாடு

$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ இன் மூன்று மூலங்களை எழுதி சமன்பாடு $4t^2 + 2t - 1 = 0$ இன்

மூலங்கள் $\sin \frac{9\pi}{10}$, $\sin \frac{13\pi}{10}$ எனக் காட்டுக. $\sin \frac{9\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ என்பதை உய்த்தறிக.

b) முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்கள் θ , $\frac{\pi}{2} - 2\theta$, $\frac{\pi}{2} + \theta$ உம் அவற்றிற்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள்

முறையே $p - q$, $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, $p + q$ உம் ஆகும். இங்கு $p > 2q > 0$ ஆகும். $\cos \theta = \frac{(p+q)}{\sqrt{2(p^2+q^2)}}$ எனக்

காட்டுக. $\sin \theta$, $\cos 2\theta$ இற்குமான ஒத்தகோவைகளை p, q இல் பெறுக. $q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ என்பதை உய்த்தறிக.

15) a) O என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து நேர்கோட்டில் இயங்கும் துணிக்கை A இன் இடப்பெயர்ச்சி x ஆனது நேரம் t இல் $x = (t-1)(t-5)$ என்பதால் தரப்படுகிறது.

(i) $t=0$ இலிருந்து $t=6$ வரைக்குமான வேகநேர வரைபை வரைக.

வரைபிலிருந்து

(ii) $t=0$ இலிருந்து $t=4$ வரையான இடப்பெயர்ச்சி யாது?

(iii) $t=0$ இற்கும் $t=4$ இற்கும் இடையான சராசரி வேகம் யாது?

b) நண்பகல் 12 மணிக்கு O என்ற புள்ளிக்கு மேற்கே 12 km தூரத்தில் 12 kmh^{-1} வேகத்தில் A

என்ற கப்பல் கிழக்கே சென்று கொண்டிருந்தது. அதே நேரம் B என்ற கப்பல் O இற்கு வடக்கே $4\sqrt{3} \text{ km}$ தூரத்தில் $12\sqrt{3} \text{ kmh}^{-1}$ வேகத்துடன் தெற்கு நோக்கி சென்று கொண்டிருந்தது.

i) A இன் B தொடர்பாக வேகம் யாது?

ii) B சார்பாக A இன் பாதையை வரைக

iii) இவற்றிற்கு இடையான மிகக் கிட்டிய தூரம் யாது?

iv) கிட்டிய தூரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம் யாது?

16) a) கிடைத்தரையில் இருந்து 30 cm உயரத்தில் உள்ள புள்ளி O வை உற்பத்தியாக கொண்டு ஒரு துணிக்கை $(4\sqrt{3}i + 4j)ms^{-1}$ என்னும் வேகத்துடன் O வில் இருந்து நிலைகுத்து தளம்வழியே புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது.

(i) துணிக்கையின் எறியற்பாதையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{49x^2}{480}$$
 எனக் காட்டுக.

(ii) பறத்தலின் போது O இலிருந்து 4m கிடைத்தூரத்திலுள்ள போது கிடைத்தரையில் இருந்து துணிக்கையின் உயரத்தைக் காண்க.

b) ABC என்பது M திணிவுடைய ஆப்பின் திணிவு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டாகும், $\angle C = \alpha$ ஆகும். முகம் BC ஒப்பமான கிடைமேசையில் தங்க ஆப்பின் ஒப்பமான முகம் AB இன் மீது m திணிவுள்ள துணிக்கை P வைக்கப்பட்டு அதி உயர் சரிவுக்கோட்டின் வழியே துணிக்கை P இயங்குமாறு மெதுவாக விடப்படுகின்றது.

(i) ஆப்பு, துணிக்கை மீது செயற்படும் விசைகளையும், ஆப்பு, துணிக்கையின் ஆர்முடுகல்களையும் தெளிவாக குறித்துக் காட்டுக.

(ii) ஆப்பு, துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்களை துணிவதற்கு தேவையான சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(iii) ஆப்பின் ஆர்முடுகல், ஆப்பு சார்பான துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் என்பவற்றைக் காண்க.

17) a) O குறித்து A, B என்ற புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே a, b ஆகும். நேர்கோடு AB இல் உள்ள எப்புள்ளியின் தானக்காவியையும் $\lambda a + (1 - \lambda)b$ எனும் வடிவில் எழுதலாம். எனக்காட்டுக.

C, D என்ற புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $2(b - a), \frac{2}{3}b$ ஆகும்.

i) A, D, C ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

AC, OB இடைவெட்டும் புள்ளியை உய்த்தறிக.

ii) OA, CB என்பன சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக்காவியைக் காண்க.

b) ABCDEF ஆனது O ஐ மையமாகவும் a பக்கநீளமும் உடைய ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி.

1, 2, 3, $\lambda, \mu, \gamma \in N$ விசைகள் முறையே AB, BC, CD, ED, EF, AF வழியே தாக்குகின்றன.

I. தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் λ, μ, γ என்பவற்றைக்காண்க.

II. λ, μ, γ என்ற விசைகள் நீக்கப்பட்டு O ஊடான ஒரு தளவிசையும், ஓர் இணையும் சேர்க்கப்பட தொகுதி சமநிலையடையும் எனின் சேர்க்கப்பட்ட விசையையும், இணையையும் காண்க.



வடமாதிரி கல்வித் திணைக்களத்துடன் இணைந்து
தொண்டமாளாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்
3ம் தவணைப் பரீட்சை - 2020

Conducted by Field Work Centre, Thondaimanaru
In Collaboration with Provincial Department of Education Northern Province
3rd Term Examination - 2020

Grade - 12 (2021)

Combined Maths

Marking Scheme

$$1. f(x) = x^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2$$

$$= x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 - 2ab$$

$$= \{x - (a+b)\}^2 - 2ab \quad (5)$$

$$a+b = 3 \quad \text{--- (1) (5)}$$

$$-2ab = -4 \Rightarrow ab = 2 \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow a + \frac{2}{a} = 3$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-2) = 0 \quad (5)$$

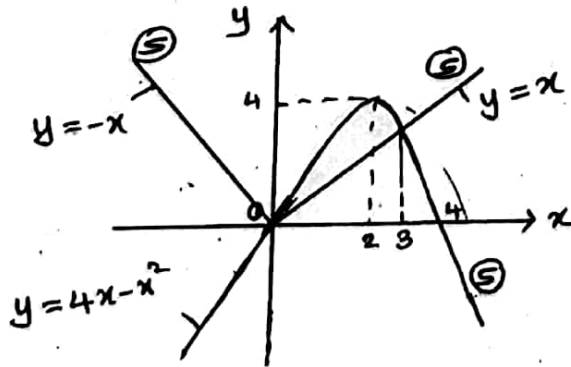
$$\Rightarrow a = 1 \text{ or } a = 2$$

$$a=1 \quad \text{or} \quad a=2$$

$$b=2 \quad \text{or} \quad b=1 \quad (5) \quad \boxed{25}$$

$$2. y = 4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$$

$$y = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$



$$y = 4x - x^2$$

$$y = x$$

$$\left. \begin{aligned} 4x - x^2 &= x \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ or } x = 3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$x(4-x) = |x|$$

$$4x - x^2 \geq |x|$$

$$0 \leq x \leq 3 \quad (5) \quad \boxed{25}$$

$$3. \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \quad (5)$$

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$

$$x^0: 1 = A + B \quad \text{--- (1) (5)}$$

$$x^1: 0 = 2A + B \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = -1, B = 2$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \quad (5)$$

$$\frac{2x}{(2x+1)(2x+2)} = \frac{-1}{(2x+1)} + \frac{2}{(2x+2)} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \quad (5) \quad \boxed{25}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{4(\frac{\pi}{2} - x)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\frac{\pi}{2} - x} \right\}^2 = 8 \times 1^2 = 8 \quad (5) \quad \boxed{25}$$

$$5. \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x-1}\right), \beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2x-1}, \tan \beta = \frac{1}{2x+1}$$

$$\alpha + \beta = \tan^{-1} 2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 2$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} = 2 \quad (5)$$

$$1 - \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(2x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ or } x = 1 \quad (5)$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 1$$

25

b) $x + 2y = \ln \frac{1}{10}$

$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \quad (5)$$

for m

$$\downarrow mg - T = m\ddot{x} \quad (5)$$

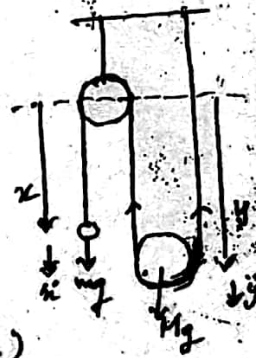
$$M \downarrow Mg - 2T = M\ddot{y} \quad (5)$$

$$(2m - M)g = 2m\ddot{x} - M\ddot{y}$$

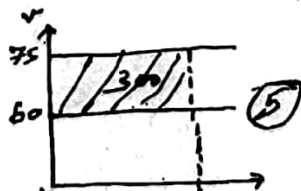
$$= 2m\ddot{x} - M(-\frac{\ddot{x}}{2})$$

$$\ddot{x} = \frac{2(2m - M)g}{4m + M} \quad (5)$$

$M < 2m \Rightarrow$ system is rest (5)



(7)



distance travelled by A in time = $75t$ (5)

" " B " = $60t$ (5)

$$75t - 60t = 300 \quad (5)$$

$$t = \frac{300}{15}$$

$$= 20 \text{ sec} \quad (5)$$

(9) a. $(a+b+c) = 0$

$$a + a + b + a = 0 \quad (5)$$

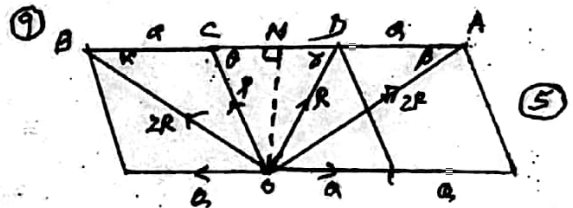
Why $ab + b^2 + b \cdot c = 0 \quad (5)$

$$ca + c \cdot b + c^2 = 0 \quad (5)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0$$

$$1 + 1 + 1 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0 \quad (5)$$

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2} \quad (5)$$



$$OA = OB = 2R \quad (5)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta$$

$$CN = ND = \frac{a}{2} \quad (5)$$

$$\Rightarrow P < R$$

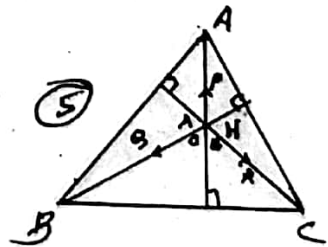
$$(2R)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (5)$$

$$4R^2 - R^2 = 2a^2$$

$$\sqrt{3R} = \sqrt{2}a \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

(10)



In equilibrium

$$(5) \frac{P}{\sin B \sin C} = \frac{Q}{\sin A \sin C} = \frac{R}{\sin A \sin B}$$

$$(5) \frac{P}{\sin(B+C)} = \frac{Q}{\sin(A+C)} = \frac{R}{\sin(A+B)}$$

$$(5) \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$$

$$(5) \frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$$

$$11] a) x^2 - bx + c = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ \alpha\beta = c \end{cases} \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= b^3 - 3cb \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = c^3 \textcircled{5}$$

The equation whose roots are α^3, β^3 is

$$\begin{aligned} x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + \alpha^3\beta^3 &= 0 \\ x^2 - (b^3 - 3cb)x + c^3 &= 0 \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\text{Let } y = 1 + x \textcircled{5} \quad [30]$$

$$x = \alpha^3 \Rightarrow y = 1 + \alpha^3$$

$$x = \beta^3 \Rightarrow y = 1 + \beta^3$$

$$\text{Put } x = (y-1) \text{ in } \textcircled{5}$$

$$(y-1)^2 - (b^3 - 3cb)(y-1) + c^3 = 0 \textcircled{5}$$

The required equation is

$$(x-1)^2 - (b^3 - 3cb)(x-1) + c^3 = 0 \textcircled{5} \quad [15]$$

$$b) f(x) = 0$$

$$x^2 + (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda + 2)^2 - 4(1)(2\lambda) \textcircled{10} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$= (\lambda - 2)^2 \textcircled{5}$$

$$\neq 0 \textcircled{5}$$

$\Delta \neq 0$, Hence $f(x) = 0$ has real roots $\textcircled{5}$

[30]

Roots of $f(x) = 0$ are α, β (say)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(\lambda + 2) \\ \alpha\beta = 2\lambda \end{cases} \textcircled{5}$$

$$|\alpha - \beta| = 1 \textcircled{5}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 1$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 \textcircled{5}$$

$$[-(\lambda + 2)]^2 - 4(2\lambda) = 1$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \textcircled{5}$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ or } \lambda = 1 \textcircled{5}$$

[25]

$$c) g(x) = x^3 - 3x + 5$$

$$g(x) = (x-2)(x-1)\phi(x) + Ax + B \textcircled{10}$$

$$g(2) = 2A + B$$

$$7 = 2A + B \textcircled{15}$$

$$g(1) = A + B$$

$$5 = A + B \textcircled{20}$$

$$0, 2 \Rightarrow A = 4, B = -1 \textcircled{10}$$

$$\begin{aligned} \text{Remainder} &= Ax + B \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

$$x^3 - 3x + 5 = (x-2)(x-1)\phi(x) + 4x - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3 - 7x + 6 &= (x-2)(x-1)\phi(x) \textcircled{5} \\ &= (x-2)(x-1)(x-k) \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &: 6 = -2k \\ & k = -3 \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x-1)(x+3) \textcircled{5}$$

[50]

12. (a)

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3(6x) - (3x^2 - 1)3x^2}{x^6} \quad (10)$$

$$= \frac{6x^2 - 9x^2 + 3}{x^4} \quad (5)$$

$$= -\frac{3(x^2 - 1)}{x^4} \quad (15)$$

There is no y intercept because $f(x)$ is undefined

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 1}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = \infty$$

$\therefore x = 0$ is a vertical asymptote. (5)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right\} = 0$$

$\therefore y = 0$ is a horizontal asymptote. (5)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad (5)$$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
sign of $f'(x)$	(-)	(+)	(+)	(-)
	decrease	increase	increase	decrease

$(-1, -2)$ is a local minimum and

$(1, 2)$ is a local maximum. (5)

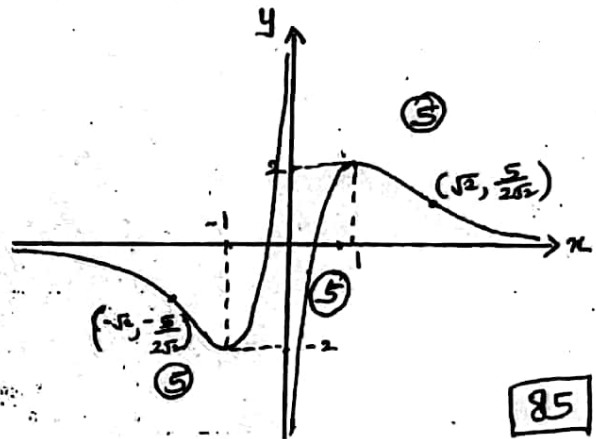
$$f''(x) = \frac{6(x^2 - 2)}{x^5} = \frac{6(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x^5}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad (5)$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{5}{2\sqrt{2}}, \quad f(-\sqrt{2}) = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

	$x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
sign of $f''(x)$	(-)	(+)	(-)	(+)
	concave down	concave up	concave down	concave up

$(-\sqrt{2}, -\frac{5}{2\sqrt{2}}), (\sqrt{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}})$ are inflection points (5)



85



$$\text{Volume} = 729\pi$$

$$\pi r^2 h = 729\pi$$

$$h = \frac{729}{r^2} \quad (1)$$

$$\text{Total surface area } A = 2\pi r h + \pi r^2 \quad (5)$$

$$A = 2\pi \left(\frac{729}{r} \right) + \pi r^2 \quad (6)$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi(729) \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \pi(2r) \quad (10)$$

$$= 2\pi \left(-\frac{729}{r^2} + r \right)$$

$$= \frac{2\pi(r^3 - 9^3)}{r^2} \quad (5)$$

$$\frac{dA}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = 9 \quad (5)$$

$$r < 9$$

$$r > 9$$

$$\frac{dA}{dr} < 0$$

$$\frac{dA}{dr} > 0$$

$\therefore A$ is minimum when $r = 9$ m

$$r = 9 \Rightarrow h = 9 \text{ m} \quad (5)$$

50

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos\theta \cos\theta - \sin\theta \sin\theta \\ &= (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta \\ &= 2\sin\theta \cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta - \sin 3\theta & \\ &= 1 - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= t \\ &= 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \cos 2\theta - \sin 3\theta &= 0 \\ \cos 2\theta &= \sin 3\theta = \cos(\pi/2 - 3\theta) \\ 2\theta &= 2n\pi \pm (\pi/2 - 3\theta) \quad n \in \mathbb{Z} \\ 5\theta &= 2n\pi + \pi/2 \quad \ominus \quad -\theta = 2n\pi - \pi/2 \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \theta &= \frac{9\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{10} \text{ are solutions} \end{aligned}$$

The roots of $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ are $\sin \frac{\pi}{10}$, $\sin \frac{\pi}{2}$ & $\sin \frac{9\pi}{10}$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow t - 1 \text{ is a factor of } 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1$$

$$\Rightarrow 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{10}, \sin \frac{9\pi}{10} \text{ are roots of } 4t^2 + 2t - 1 = 0$$

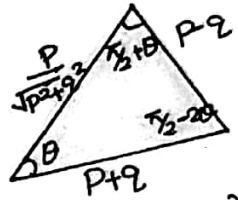
$$\Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad t = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\sin \frac{9\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\sin \frac{9\pi}{10} > 0$$

60



$$\frac{\sin\theta}{P-Q} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta)}{\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}} = \frac{\sin(\pi/2 + \theta)}{P+Q}$$

$$\frac{\sin\theta}{P-Q} = \frac{\cos 2\theta \cdot \sqrt{P^2+Q^2}}{P} = \frac{\cos 2\theta}{P+Q} = k$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$k^2(P-Q)^2 + k^2(P+Q)^2 = 1$$

$$2k^2(P^2+Q^2) = 1$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2(P^2+Q^2)}}$$

$$\cos\theta = k(P+Q) = \frac{(P+Q)}{\sqrt{2(P^2+Q^2)}}$$

$$\sin\theta = k(P-Q) = \frac{(P-Q)}{\sqrt{2(P^2+Q^2)}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{kP}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{P}{\sqrt{2(P^2+Q^2)}}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \frac{2(P+Q)^2}{2(P^2+Q^2)} - 1 = \frac{4PQ}{2(P^2+Q^2)} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{\sqrt{2(P^2+Q^2)}} = \frac{4PQ}{2(P^2+Q^2)}$$

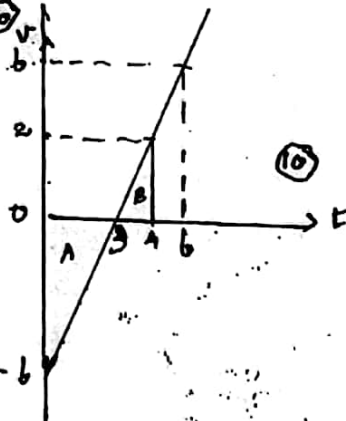
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

55

15/2

$$x = t^2 - 6t + 5$$

$$\dot{x} = 2t - 6 \quad (10)$$



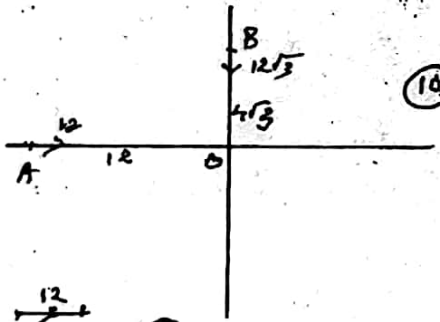
$$A = -\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9 \quad (10)$$

$$B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

$$\text{displacement in 4 sec} = 9 + 1 = -8 \quad (10)$$

$$\text{Average velocity} = \frac{-8}{4} = -2 \quad (10)$$

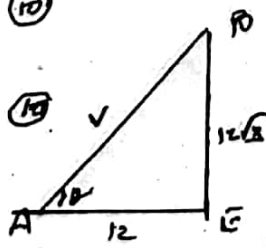
12)



$$V_{AE} = 12 \quad (10)$$

$$V_{BE} = 12\sqrt{3} \quad (10)$$

$$V_{AB} = V_{AC} + V_{CB} \quad (10)$$

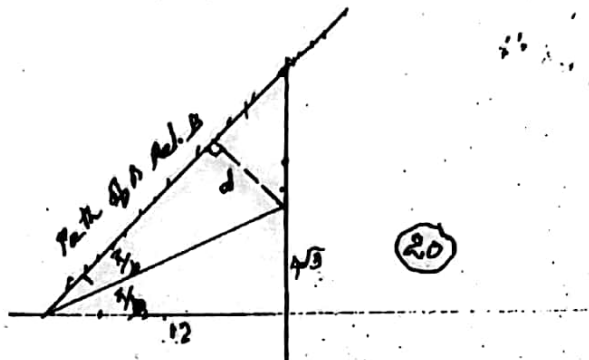


$$V_{AB}^2 = 12^2 + (12\sqrt{3})^2 \quad (10)$$

$$V_{AB} = 24$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (10)$$



Minimum distance is $4\sqrt{2}$ (10)

$$\text{time taken to this} = \frac{12}{24}$$

$$= 30 \text{ min} \quad (10)$$



$$I \rightarrow x = 4\sqrt{3}t \quad (10)$$

$$y = 4t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{x^2}{48}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{49x^2}{480}$$

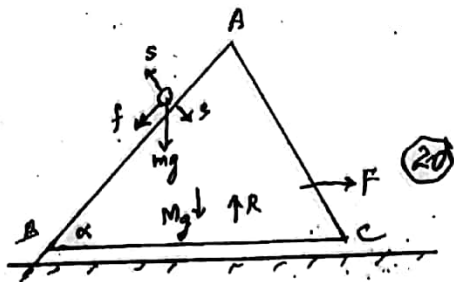
$$II \rightarrow x=4, y=h \quad (10)$$

$$h = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{49 \times 16}{480}$$

$$\therefore H = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{49}{30} + 0.3 \quad (10)$$

$$= 4.3 \text{ m.}$$

16b)



form acceleration $f \rightarrow F$ (10)

form $f \rightarrow F$ (10)

form $F = ma$

$$mg \sin \alpha = m(f - F \cos \alpha) \quad (10)$$

For $M+m \rightarrow$

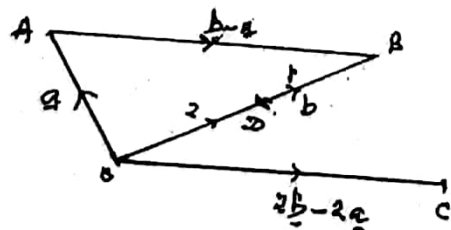
$$0 = MF + m(F - f \cos \alpha) \quad (10)$$

$$0 = (M+m)F - mf \cos \alpha$$

$$F = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \quad (10)$$

$$f = \frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \quad (10)$$

17b) Theory - (10)



$$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD}$$

$$= -a + \frac{2}{3}b \quad (10)$$

$$\vec{AE} = \vec{AO} + \vec{OE}$$

$$= -a + \frac{2}{3}b \quad (10)$$

$$= 3AD \quad (5)$$

$\Rightarrow A, C, D$ are collinear. (5)

Ac, OB intersect at D (5)

from the first part

any point on OA can be written in the form $r = \mu a$ (5)

+ the point on CB is $r = \lambda(2b-2a) + (1-\lambda)b$ (5)

$$r = \lambda(2b-2a) + (1-\lambda)b \quad (5)$$

\therefore intersecting point is given by

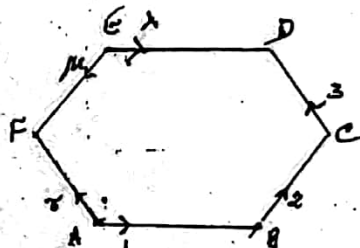
$$\mu a = \lambda(2b-2a) + (1-\lambda)b \quad (5)$$

$$(\mu+2\lambda)a + (\lambda-1-2\lambda)b = 0$$

$$\Rightarrow \mu+2\lambda = 0 \quad + \quad -\lambda-1 = 0 \quad (10)$$

$$\lambda = -1$$

\therefore intersecting point is $2a$



for equilibrium

$$\rightarrow x = 1 + \lambda + 2\cos 60^\circ - 3\cos 60^\circ - \mu \cos 60^\circ - \gamma \cos 60^\circ \quad (10)$$

$$\lambda - \frac{\mu}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\uparrow (2+3-\mu+\gamma)\sin 60^\circ = 0 \quad (10)$$

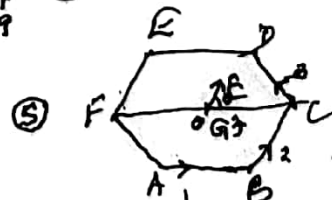
$$\gamma - \mu + 5 = 0$$

$$F \uparrow - \lambda a \sin 60^\circ + 3 \cdot 2a \sin 60^\circ + 2 \cdot 2a \sin 60^\circ + 1 \cdot a \cos 60^\circ = 0 \quad (10)$$

$$\lambda = 11$$

$$\mu = 14 \quad (15)$$

$$\gamma = 9$$



$$\rightarrow R \cos 60^\circ - 3 \cos 60^\circ + 2 \cos 60^\circ + 1 = 0 \quad (5)$$

$$\uparrow F \sin 60^\circ + 2 \cos 60^\circ + 2 \cos 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$F \sin 60^\circ = -2 \cos 60^\circ$$

$$\tan 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F = \sqrt{19}$$

$$\uparrow 9 + (2+1+1)R \cos 60^\circ = 7 \quad (5)$$