



පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව, නැගෙනහිර පළාත
 மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம், கிழக்கு மாகாணம்
 Provincial Department of Education, Eastern Province



අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2019
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர) மாநிலப் பரீட்சை - 2019
 General Certificate of Education (Adv. Level) Model Examination - 2019

සංයුක්ත ගණිතය - I
 இணைந்த கணிதம் - I
 Combined Mathematics - I

10 T I

පැය තුනයි
 Three Hours
 03 மணித்தியாலம்

மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்

(10) இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	01	
	02	
	03	
	04	
	05	
	06	
	07	
	08	
	09	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

பகுதி A

- 1) $[\lambda + 1][x^2 - bx] = [\lambda - 1][ax - c]$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும். $\alpha + \beta = 0$ எனின், $\lambda = \frac{a-b}{a+b}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\lambda \neq -1$ ஆகும்.

- 2) $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{2-x}$ எனின், x இன் வீச்சினைக் காண்க.

3) $\cos^{-1} \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \ln a$ எனின், $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனக் காட்டுக. இங்கு a மாறிலி.

● $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^8} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) - \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) + \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) \cos\left(\frac{x^2}{4}\right) \right\} = \frac{1}{32}$ எனக் காட்டுக.

5) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ எனும் x இலான சார்பை $[x + 2]^2$ இனால் வகுபடும்போது பெறப்படும் மீதியை வகையீட்டு அறிவை மட்டும் பயன்படுத்திக் காண்க.

6) $\frac{3x-1}{(1-x^2)(x+2)}$ இனைப் பகுதிப்பின்னமாக்குக.

7) $\frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ ஐ x ஐக் குறித்து வகையிடுக. இங்கு $a \in \mathbb{R}^+$ ஓர் மாறிலி. இதில் இருந்து $\int \frac{1}{a+x^2} dx$ ஐக் காண்க.

8) வளையி ஒன்றின் பரமானச் சமன்பாடு $x = t^2$, $y = 2t - 1$ ஆகும். $t = 2$ இல் வளையியிற்கு வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9) $y = 2x + 3$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும், அக் கோட்டிலுள்ள $(1, 5)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் நேர்கோடானது $x - 9y = 0$ என்ற கோட்டை A யில் சந்திப்பின் A யின் ஆள்கூற்றைக் காண்க.

10) θ என்பது நான்காம் கால் வட்டத்தில் இருக்கும் போது $\cot^2 \theta = 4$ ஐத் திருப்தி செய்யும் எனின்,

$$\frac{1}{\sqrt{5}} [\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta] = \frac{3}{2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

பகுதி B

11)

(a) $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ஆக இருக்கையில் $f(x) = x^3 - \left(\frac{3b-1}{a}\right)x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{1}{a}$ ஆகும். $f(x)$ ஐ $\left(x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)$ இனால் வகுக்க மீதி 0 எனின், a, b இனைக் காண்க.

மேலும், இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\left\{\frac{f(x)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{f(x)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right\}$ இன் ஒரு காரணி $\left(x - \frac{5}{12}\right)$ என உய்த்தறிக.

(b) சமன்பாடு $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ இன் மூலங்கள் α, β இங்கு $a \neq 0$ உம், $|a| \neq 1$ உம் ஆகும்.

(i) மேற்படி சமன்பாடானது பொருந்தும் மூலங்களை கொண்டிருக்காது எனக் காட்டுக.

(ii) $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$ ஐ a யின் சார்பில் தருக.

(iii) $\alpha^4 + \beta^4 = a^4 + \frac{1}{a^4}$ எனக் காட்டுக.

இம் முடிவுகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் $(\alpha^3 + \alpha^4), (\beta^3 + \beta^4)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $x^2 - (a^\lambda + a^{-\lambda} + a^\mu + a^{-\mu})x + (2 + a^\gamma + a^{-\gamma}) = 0$ எனின், λ, μ, γ இனைக் காண்க. ($\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$)

12)

(a) $y = |4x - 3|$ இன் வரைபை வரைக. இதிலிருந்து, $y = -|4x - 3|$ இன் வரைபை வரைக. ஒரே உருவில் $y = |2x| - 3, y = -|4x - 3|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $|4x - 3| + 2|x| < 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் மெய்ப்பெறுமான தொடையைக் காண்க.

மேலும், $|2x - 3| + |x| < 3$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் மெய்ப்பெறுமான தொடையை உய்த்தறிக.

(b) $(3 + \sqrt{8})^{x^2-x+1} + (3 - \sqrt{8})^{x^2-x-1} = \frac{2}{3-\sqrt{8}}$ இனைத் தீர்க்க.

(c) $a, b \in \mathbb{R}^+, a, b \neq 1$ ஆகும் போது $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $x = 1 + \log_a bc, y = 1 + \log_b ac, z = 1 + \log_c ab$ எனின், $xyz = xy + yz + zx$ எனக் காட்டுக.

13)

(a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2[\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)]}{\sqrt{3} \theta (\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta)} = \frac{4}{3}$ எனக் காட்டுக.

(b) $y = \frac{1}{4}\{x^2 \tan(x^2) + \ln|\cos(x^2)|\}$ எனின், $\left(\frac{dy}{dx}\right) [1 + \cos(2x^2)] = x^3$ எனக் காட்டுக.

(c) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ என்க. ($x > 0$)

(i) $y \frac{dy}{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{4}$ எனவும்,

(ii) $y \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}} [2\sqrt{x} + 3x]}{16}$ எனவும் காட்டுக.

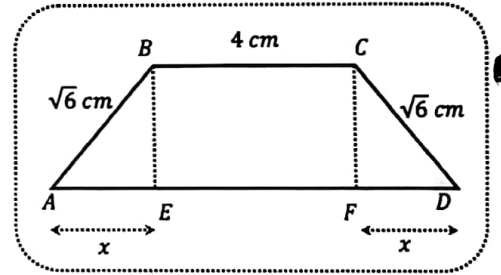
இதிலிருந்து $\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=4} = -\frac{1}{48}$ எனவும் காட்டுக.

(d) $x = \cos 2\theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $y = \sin \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right]$ எனின், $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ எனக் காட்டுக.

14)

(a) $y = \frac{2x-1}{(x-3)^2}$ என இருக்க $x \neq 3$ இற்கு $y' = -\frac{2(x+2)}{(x-3)^3}$ இனால் தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக. $x \neq 3$ இற்கு $y'' = \frac{4x+18}{(x-3)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. அணுகுகோடு, திரும்பற்புள்ளி, விபத்திப்புள்ளிகளைக் காட்டுவதன் மூலம் $y = \frac{2x-1}{(x-3)^2}$ இன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

(b) தரப்பட்டுள்ள உருவில் ABCD ஆனது BC, AD ஆகியன அதன் சமாந்தரப் பக்கங்களாக உள்ள ஒரு சரிவகமாகும். சென்றிமீற்றரில் அளக்கப்படும் அதன் பக்கங்களின் நீளங்கள் $AB = CD = \sqrt{6} \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$, $AD = 4 + 2x$ ஆகியவற்றினால் தரப்பட்டுள்ளன. இங்கு $0 < x < \sqrt{6} \text{ cm}$ ஆகும்.



BE, CF ஆகியன முறையே B, C ஆகிய உச்சிகளிலிருந்து பக்கம் AD யிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளாகும்.

சரிவகம் ABCD யின் பரப்பளவு $A(x)$ ஆனது $A(x) = [4 + x]\sqrt{6 - x^2}$ இனால் சதுர சென்றிமீற்றரில் தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக.

சரிவகம் ABCD யின் பரப்பளவு $A(x)$ ஆனது உயர்ந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15)

(a) $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ எனின், பகுதிப்பின்ன முறைமூலம் தொகையிடுக.

(b) பகுதிகளாக தொகையிடல் மூலம் $\int x \tan^{-1}(x+1) dx$ ஐக் காண்க.

(c) $I = \int \frac{\sec^2 x}{(\sec x + \tan x)^n} dx$ எனக் கொள்வோம். ($n > 1$) $\sec x + \tan x = t$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(n+1) \cdot t^{n+1}} - \frac{1}{(n-1) \cdot t^{n-1}} \right] + C$ எனக் காட்டுக. இங்கு C எதேச்சை மாறிலி.

இதிலிருந்து, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{(\sec x + \tan x)^4} dx$ ஐக் காண்க.

16) $P(x_0, y_0)$ என்னும் புள்ளியினூடு செல்கின்ற படித்திறன் m ஐ உடைய நேர்கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறு $[x_0 + t, y_0 + mt]$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t - பரமானம். A, C என்பன முறையே $(5, -1), (-2, 0)$ என்னும் புள்ளிகளாகும் AC யின் செங்குத்து இருகூறாக்கி மீதுள்ளபுள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளை மேலே காட்டியவாறு பரமானம் t இல் காண்க. இதிலிருந்து,

(i) A, B, C, D என்பன ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாக இருப்பின் B, D என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(ii) A, B', C, D' என்பன 50 சதுர அலகுப் பரப்புக் கொண்ட ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட சாய்சதுர உச்சிகளாக இருப்பின் B', D' என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

17)

a) $2 \tan^{-1} x + \tan^{-1}(x + 1) = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க. இதிலிருந்து $\cos\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right\} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ எனக் காட்டுக.

b) $f(x) = \cos x + \sin x$ எனக் கொள்வோம்.

$f(x)$ ஐ $A \cos(x - \alpha)$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு A, α துணியப்படவேண்டிய மாறிலிகள். இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $-\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ இற்கு $f(x) = \cos x + \sin x$ இன் பரும்படிப் படத்தை வரைக. மேலும், $f(x) = \cos x + \sin x + 2$ எனும் வரைபை உய்த்தறிந்து வரைக.

c) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதுமொரு ΔABC யிற்கு \sin விதியைக் கூறுக.

மேலும், ஒரு ΔABC யிற்கு வழமையான குறிப்பீட்டில் $\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{b+c}\right) \left(\frac{1+\cos A}{\sin A}\right)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $b = \sqrt{3}c, \hat{A} = \frac{\pi}{6}$ ஆக

(i) ΔABC ஓர் விரிகோண முக்கோணம் எனவும்,

(ii) ΔABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனவும் காட்டுக.



පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව, නැගෙනහිර පළාත
மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம், கிழக்கு மாகாணம்
Provincial Department of Education, Eastern Province



අධ්‍යයන පොදු තනතුරු පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය 2019

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்நிலை) மாநிலப் பரீட்சை 2019

General Certificate of Education (Adv. Level) Model Examination - 2019

සංයුක්ත ගණිතය - II
இணைந்த கணிதம் - II
Combined Mathematics - II

10 T II

පැය තුනයි
Three Hours
03 மணித்தியாலம்

මෙලතික වාසිපු ඊතරම - 10 තිමිඨතකු
Additional Reading Time - 10 minutes

அறிவுறுத்தல்கள்

➤ පලුති A ආලලා වනාකකුකුකුකු, පලුති B වරුමපිය 5 වනාකකුකුකුකු වර්ඨයනරුකුකුකු .

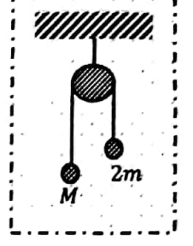
(10) இணைந்த கணிதம் II		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	01	
	02	
	03	
	04	
	05	
	06	
	07	
	08	
	09	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

[பக்கம் 2 ஐப் பார்க்க]

3) உற்பத்தி 0 பற்றி A, B, C, D யின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{i} + \underline{j}, 2\underline{i} + 3\underline{j}, p\underline{i} + 2\underline{j}, \underline{i} + q\underline{j}$ ஆகும். $ABCD$ ஒரு இணைகரம் எனத் தரப்படின் p யினதும், q யினதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

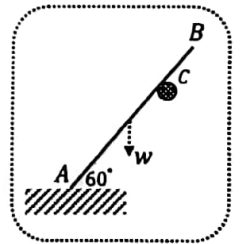
- 4) ஒரு துணிக்கையானது u வேகத்துடன் கிடையுடன் α கோணத்தை ஆக்குமாறு எறியப்படுகிறது. துணிக்கை ஆரம்ப திசைக்கு செங்குத்தாக இயங்கும் போது அது சென்ற நிலைக்குத்து உயரம் $\frac{u^2}{2g} [1 - \cot^2 \alpha]$ எனக் காட்டுக. இங்கு g ஆனது புவியீர்பு ஆர்முடுகல் ஆகும்.

- 5) கிடைத்தளத்திற்கு மேலே ஒரு இலேசான கப்பி தனது அச்ச கிடையாக இருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டிருப்பதை உருகாட்டுகிறது. $2m, M (> 2m)$ என்னும் இரு திணிவுகள் ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் மீழ்தன்மையற்ற நீளா இழையொன்றின் இரு முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது எனின், திணிவு M இனது ஆர்முடுகல் $\frac{(M - 2m)g}{M + 2m}$ எனக் காட்டுக.



- 6) கிடையுடன் α கோணத்தை ஆக்குகின்ற ஒரு பாதையில் ஒரு சிறுவன், மேல்நோக்கி உயர்வேகம் 5 ms^{-1} யுடன் மோட்டார் வண்டியில் செல்கிறான். சிறுவனினதும், மோட்டார் வண்டியினதும் மொத்த

- 8) w நிறையும் $4a$ நீளமும் உடைய சீரான பலகை AB யை உரு காட்டுகிறது. பலகையின் அதன் கீழ் முனை A ஒரு கரடான கிடைத்தரையைத் தொடுமாறும், கிடைக்கு 60° யில் C யிலுள்ள ஒப்பமான முளையில் சாய்ந்திருக்கப் பெற்றும் எல்லைச் சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கிறது. இங்கு $AC = 3a$ ஆகும். பலகைக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.



9) சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு கார் தன் இயக்கத்தின் பொழுது அடுத்தடுத்த மூன்று சமநேர இடைவெளிகளில் p, q, r மீற்றர் தூரங்களைக் கடத்துகின்றது எனின், $p = 2q - r$ எனக் காட்டுக.

10) $(3\hat{i} + 4\hat{j}) ms^{-1}$ எனும் வேகத்தில் பயணிக்கும் கப்பலிலுள்ள பிரயாணிக்கு ஒருபடகானது $(2\hat{i} - 5\hat{j}) ms^{-1}$ வேகத்துடன் செல்வதாகத் தோன்றுகிறது. படகின் உண்மை வேகம் என்ன?

பகுதி B

11)

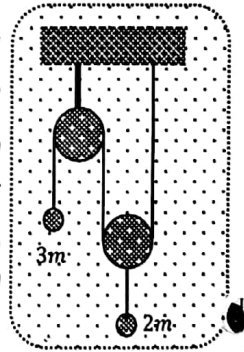
- (a) ஒரு புகையிரதம் v எனும் மாறா வேகத்துடன் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் போது A என்னும் இடத்தில் பெட்டி ஒன்று கழன்று விடுகிறது. பாதைத் தடை காரணமாக பெட்டியானது F எனும் சீரான அமர்முடுகலுக்குட்படுகிறது. அதே வேளை புகையிரதம் f எனும் சீரான ஆர்முடுகலைப் பெறுகிறது. பெட்டி கழன்று t நேரத்தின் பின்னர் பெட்டி கழன்றதை உணர்ந்த புகையிரதச் சாரதி உடனடியாக தடுப்புக்களைப் பிரயோகித்து சீரான f எனும் அமர்முடுகலுடன் சென்று B யில் ஓய்வடைகிறது. இரண்டினதும் வேக- நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து,
- (i) நேரம் t யில் புகையிரதத்தின் கதி $v + ft$ எனக் காட்டுக.
- (ii) A யில் இருந்து புகையிரதம் இயங்கிய தூரம் $\frac{1}{2}\left(2v + ft + \frac{(v+ft)^2}{f}\right)$ எனக் காட்டுக.
- (iii) புகையிரதம் ஓய்வடைந்து எவ்வளவு நேரத்தின் பின் பெட்டி ஓய்வடையும்.

- (b) சீரான ஆர்முடுகலுடன் நேர்கோட்டில் இயங்கும் துணிக்கையொன்று அடுத்துவரும் t_1, t_2, t_3 எனும் நேர இடைவெளிகளில் முறையே a, b, c தூரங்களைக் கடக்கிறது. இதன் இயக்கத்திற்கான வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து,

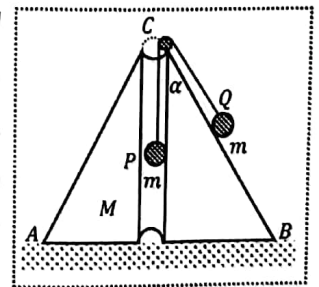
- (i) துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{2(bt_1 - at_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$ எனக் காட்டுக.
- (ii) துணிக்கை ஒவ்வொரு நேர இடைவெளியிலும் அது சென்ற தூரங்கள் சமனாயின், $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$ எனக் காட்டுக.

12)

- (a) ஒரு நிலையான ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்கின்ற இலேசான நீட்ட முடியாத இழை ஒன்று ஒரு நுனியில் திணிவு $3m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையைக் காவுகிறது. இழை திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையைக் காவுகின்ற ஓர் ஒப்பமான இலேசான கப்பியின் கீழாகச் செல்கிறது. இழையின் மற்றய நுனி உருவில் காண்படுகின்றவாறு ஒரு பாவுகையுடன் (சீலிங்குடன்) இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தொகுதி புவியீர்ப்பின் கீழ்ச் சுயாதீனமாக இயங்குகிறது. இழையிலுள்ள இழுவை காண்க.



- (b) அரை உச்சிக்கோணம் α உடைய ஒரு நேர்வட்ட M திணிவுடைய திண்ம கூம்பு உச்சி C ஐ கொண்டது. C ஊடாக மையக் குறுக்கு வெட்டின் அடி AB ஆகும். C யினூடாக கூம்பின் அச்சை அச்சாகக் கொண்ட உறுளை வடிவமான சிறு அழுத்தமான துவாரம் அமைந்துள்ளது. கூம்பின் அடித்தளம் AB ஒரு அழுத்தமான கிடைத்தளத்தோடு பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.



P, Q ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள் ஒரு இலேசான நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டு P துவாரத்தினுள்ளும், Q ஆனது BC யில் இருக்கவும் C யில் பொருத்தப்பட்ட

இலேசான ஒரு சிறு கப்பியின் உதவியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு CP என்ற பகுதி நிலைக்குத்தாக உள்ளது.

(i) தொகுதி ஓய்வில் இருந்து இயங்கவிடப்படின் கூம்பின் ஆர்முடுகல் $\left\{ \frac{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{\frac{2M}{m} + 4 - \sin^2 \alpha} \right\} g$ எனக் காட்டுக.

(ii) P, Q வில் ஆப்பினால் உருற்றப்படும் மறுதாக்கங்களை காண்க.

13)

(a) O எனும் புள்ளியில் இருந்து ஒரு துணிக்கை v வேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகிறது. O வில் இருந்து அதன் மட்டத்தில் 2a தூரத்தில் அடக்கிறது. O வில் இருந்து அதன் மட்டத்தில் a தூரத்தில் b என்னும் அதி உயர் உயரத்தை அடைகிறது.

$\tan \alpha = \frac{2b}{a}$ எனவும், $v^2 = \frac{g}{2b}(4b^2 + a^2)$ எனக் காட்டுக.

O குறித்து அதன் பாதையில் ஒரு புள்ளி (x, y) எனின், $y = \frac{2b}{a}x - \frac{b}{a^2}x^2$ எனக் காட்டுக.

$y = -p(x - q)^2 + r$ எனும் வடிவில் மாற்றுக. இங்கு p, q, r கணிக்கப்படவேண்டிய மாறிலிகள்.

அத்துடன் $BP^2 = \frac{b^2}{a^4}(x - a)^4 - \frac{2b^2}{a^2}(x - a)^2 + (x - a)^2 + b^2$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $B \equiv (a, 0), P \equiv (x, y)$ ஆகும்.

மேலும், x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களிற்கும் $BP \geq b$ எனின், $b \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

(b) கிழக்கு நோக்கி v வேகத்துடன் செல்லும் கப்பலுக்கு காற்று தெற்கில் இருந்து வீசுவது போல் தோன்றுகின்றது. கப்பலின் வேகம் இரட்டிக்கப்பட்ட போது காற்று வட மேற்கே வீசுவது போல தோன்றுகின்றது. இரு சார்பு வேக முக்கோணிகளையும் ஒரே படத்தில் வரைந்து காற்றின் வேகத்தையும், திசையையும் காண்க.

14)

(a) 1500 kg திணிவுடைய ஒரு கார், 500 kg திணிவுடைய ஒரு வண்டியை இழுத்துச் செல்கிறது. அவை ஒரு கிடைத்தரையில் செல்லும் போது கார் ஆனது 4100 N உருற்று விசையை பயன்படுத்துகிறது. காரிற்கும், வண்டிக்கும் உரிய தடைவிசைகள் முறையே 800 N, 300 N எனின்,

(i) காரின் ஆர்முடுகல்

(ii) கார், வண்டி இணைப்பில் உள்ள இழுவிசையைக் காண்க.

(iii) தற்போது கிடையுடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ சரிவுடைய பாதையில் அவை மேல்நோக்கி செல்லும் போது தடைவிசைகள் மாறவில்லை எனக் கொண்டு கதி 10 ms^{-1} இல் இருந்து 20 ms^{-1} ஆக மாற 16 sec எடுத்தது எனின், அவற்றின் கதி 15 ms^{-1} ஆக உள்ள போது காரின் எஞ்சின் உருற்றும் வலுவைக் காண்க. (இங்கு $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ஆகும்.)

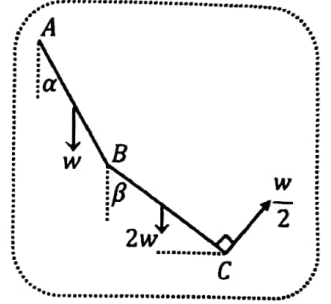
(b) A, B என்பன முறையே m, em திணிவுள்ள ஒரே அளவான இரு கோளங்கள் ஆகும். இவை ஒப்பமான கிடைத்தரையின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு e என்பது A, B என்பவற்றுக் கிடையே உள்ள மீளமைவுக்குணகம். ($0 < e < 1$) ஆரம்பத்தில் இரு கோளங்களும் ஒரே திசையில், ஒரே நேர்கோட்டில் முறையே u, eu எனும் வேகங்களுடன் இயங்கி ஒன்றுடன் ஒன்று மோதுகின்றன.

(i) மோதுகைளின் பின் A யின் வேகம் $(1 - e + e^2)u$ எனவும், B யின் வேகம் e ஐ சார்ந்தது அல்ல எனவும் காட்டுக.

(ii) மோதுகையின் போது, B யினால் A மீது ஏற்படுத்தப்படும் கணத்தாக்கு $\frac{6}{25}mu$ எனின், e இற்கு இருக்கக்கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

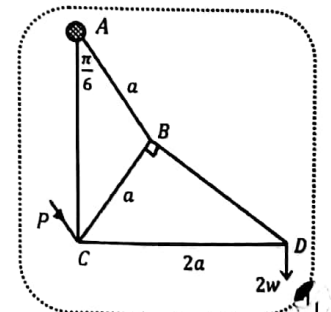
15)

(a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஐ உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB யின் நிறை w வும் BC யின் நிறை $2w$ வும் ஆகும். முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது.



AB, BC ஆகிய கோல்கள் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கிக்கொண்டிருக்க இத்தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு. C யில் BC யிற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் பிரயோகிக்கும் ஒரு விசை $\frac{w}{2}$ இனால் நாப்பத்தில் வைக்கப்படுகிறது. $\beta = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டி, மூட்டு B யில் கோல் AB ஆனது BC மீது உருற்றும் மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும், நிலைக்குத்துத் கூறையும் காண்க. அத்துடன் $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ எனக் காட்டுக.

(b) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, BD, DC, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. இங்கு $AB = CB = a, CD = 2a, \angle BAC = \frac{\pi}{6}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் A யில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது.



மூட்டு D யில் ஒரு கமை $2w$ தொங்கவிடப்பட்டு, AC நிலைக்குத்தாகவும் CD கிடையாகவும் இருக்க மூட்டு C யில் கோல் AB இற்குச் சமாந்தரமாக உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை P யினால் ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் சட்டப்படல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி D, B, C ஆகிய மூட்டுக்களுக்கு மட்டும் ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து,

(i) இழுவைகளா, உதைப்புக்களா என எடுத்துரைத்து ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களையும்

(ii) P யின் பெறுமானத்தையும் காண்க.

16)

(a) $OACB$ ஓர் இணைகரம் எனவும், D ஆனது AC மீது $AD:DC = 2:1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனவும் கொள்வோம். O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். இங்கு $\gamma > 0$ ஆகும். $\overline{OC}, \overline{BD}$ ஆகிய காவிகளை $\underline{a}, \underline{b}, \gamma$ ஆகியவற்றில் எடுத்துரைக்க. இப்போது \overline{OC} ஆனது \overline{BD} இற்குச் செங்குத்தானதெனக் கொள்வோம்.

$3|\underline{a}|^2\gamma^2 + 2(\underline{a} \cdot \underline{b})\gamma - |\underline{b}|^2 = 0$ எனக் காட்டி, $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ ஆகவும், $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ஆகவும் இருப்பின், γ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) மையம் O ஆகவும் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவும் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் தளத்தில் உள்ள மூன்று விசைகளை ஒரு தொகுதி கொண்டுள்ளது. உற்பத்தி O இலும் $Ox -$ அச்சு \overline{OB} வழியேயும் $Oy -$ அச்சு \overline{OH} வழியேயும் இருக்க விசைகளும் அவற்றின் தாக்கப் புள்ளிகளும் வழக்கமான குறியீட்டில் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு H ஆனது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும். (p நியூற்றனிலும் a மீற்றரிலும் அளக்கப்படுகின்றன.)

தாக்கப் புள்ளி	தானக் காவி	விசை
A	$a\hat{i} - \sqrt{3}a\hat{j}$	$3p\hat{i} + \sqrt{3}p\hat{j}$
C	$a\hat{i} + \sqrt{3}a\hat{j}$	$-3p\hat{i} + \sqrt{3}p\hat{j}$
E	$-2a\hat{i}$	$-2\sqrt{3}p\hat{j}$

இவ் புள்ளிகள், விசைகளை அறுகோணியில் குறித்துக்காட்டுக. மேலும் தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவள்ளதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

இப்போது \overline{FE} வழியே தாக்கும் பருமன் $6pN$ ஐ உடைய ஒரு மேலதிக விசை இத்தொகுதியில் புகுத்தப்படுகிறது. புதிய தொகுதி ஒடுங்கும் தனி விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17)

(a) l நீளமுள்ள w நிறையுமுள்ள சீர்க்கோல் AB அதன் ஓர் முனை B ஒப்பமான நிலைக்குத்து சுவரில் தாங்கவும், மற்றைய முனை A குழிவான a ஆரையுடைய வளைந்த மேற்பரப்பில் தாங்கவும் சமநிலையில் உள்ளது ($2l > a > l$). இதன் மையம் O ஆனது B யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலுள்ளது. AB, OA என்பன கிடையுடன் ϑ, β கோணத்தை அமைப்பின்,

(i) $\tan \beta = 2 \tan \vartheta$ எனவும்,

(ii) $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{a^2 - l^2}{3l^2}}$ எனவும் காட்டுக.

(b) $2w$ நிறையும், $2a$ நீளமும் உடைய சீரான கோல் AB யின் ஒரு முனை B கரடான நிலைக்குத்து சுவரில் தங்கவும், AB யின் நடுப்புள்ளியில் இணைத்த a நீளமுடைய நீளா இழையால் சுவரில் உள்ள புள்ளி C யில் இணைக்கப்பட்டு தாங்கவும் சமநிலையில் உள்ளது. A, C என்பன ஒரே

கிடைமட்டத்தில் உள்ள புள்ளியாகும். கோல் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ வும், சவருக்கும் கோலுக்கும் இடையிலான உராய்வுக்குணகம் μ உம் எனின்,

(i) $\mu \geq \tan \theta$ எனக் காட்டுக.

(ii) A யில் ஒரு கிடைவிசை w ஆனது AC வழியே பிரயோகிக்கப்பட்டால்

i. B யில் அமையும் மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக் கூறுகள் முறையே $[(1 + \tan \theta)w, w \cot \theta]$ எனக் காட்டுக.

ii. $\mu = \frac{3}{4}$ எனின், $\tan \theta \leq \frac{1}{2}$ எனவும் காட்டுக.

மரகாண மடல விபாதுப்பரிட்சை

கிணைந்த கணகம் - I

முள்ளத்திலம்

பகுதி - A

(01) $(\lambda+1)(\lambda^2 - b\lambda) = (\lambda-1)a\lambda - c(\lambda-1)$

$(\lambda+1)\lambda^2 - b(\lambda+1)\lambda - (\lambda-1)a\lambda + c(\lambda-1) = 0$ — (10)

$(\lambda+1)\lambda^2 - \lambda[a(\lambda-1) + b(\lambda+1)] + (\lambda-1)c = 0$

$\lambda + \frac{a(\lambda-1) + b(\lambda+1)}{\lambda+1} = 0$ — (10)

$a\lambda + b\lambda = a - b$

② $\lambda = \frac{a-b}{a+b}$ — (5)

25

(02) $\frac{1}{\lambda-3} - \frac{1}{2-\lambda} > 0$

$\frac{2-\lambda-\lambda+3}{(2-\lambda)(\lambda-3)} > 0$

$\frac{-2\lambda+5}{(2-\lambda)(\lambda-3)} > 0$

$\frac{2\lambda-5}{(2-\lambda)(\lambda-3)} > 0$ — (10)

$\frac{2\lambda-5}{(\lambda-2)(\lambda-3)} > 0$ — (10)

	2	5/2	3
$2\lambda-5$	(-)	(-)	(+)
$\lambda-2$	(-)	(+)	(+)
$\lambda-3$	(-)	(-)	(-)
$(2\lambda-5)$	(-)	(+)	(-)
$(\lambda-2)(\lambda-3)$	(-)	(+)	(+)

$2 < \lambda < 5/2$ or $\lambda > 3$ — (5)

$\{\lambda \in \mathbb{R} : 2 < \lambda < 5/2 \text{ or } \lambda > 3\}$

25

(03) $\cos^{-1} \left(\frac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^2 + y^2} \right) = \lambda \ln a$

$\frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^2 + y^2} \right)^2}} \times \left[\frac{(\lambda^2 + y^2)(2\lambda - 2y \frac{dy}{d\lambda})}{(\lambda^2 + y^2)^2} - \frac{(\lambda^2 - y^2)(2\lambda + 2y \frac{dy}{d\lambda})}{(\lambda^2 + y^2)^2} \right] = 0$ — (10)

$(\lambda^2 + y^2)2\lambda - 2y(\lambda^2 + y^2) \frac{dy}{d\lambda} - 2\lambda(\lambda^2 - y^2) - 2y(\lambda^2 - y^2) \frac{dy}{d\lambda} = 0$ — (5)

$2y \frac{dy}{d\lambda} [\lambda^2 + y^2 + \lambda^2 - y^2] = 2\lambda [\lambda^2 + y^2 - \lambda^2 + y^2]$ — (5)

$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{2\lambda \times 2y^2}{2y \times 2\lambda^2} = \frac{y}{\lambda}$ — (5)

25

$$(04) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{8}{n^8} \left[(1 - \cos(\frac{n^2}{2})) - \cos(\frac{n^2}{4}) \left[1 - \cos(\frac{n^2}{2}) \right] \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{8}{n^8} \left\{ \left[1 - \cos(\frac{n^2}{2}) \right] \left[1 - \cos^2(\frac{n^2}{4}) \right] \right\} \text{--- (5)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{8}{n^8} \times 2 \sin^2(\frac{n^2}{4}) \times 2 \sin^2(\frac{n^2}{8}) \text{--- (5)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{32 \times \frac{\sin^2(\frac{n^2}{4})}{16 (\frac{n^2}{4})^2} \times \frac{\sin^2(\frac{n^2}{8})}{64 (\frac{n^2}{8})^2}}{16 \times 64} \times \left[\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{n^2}{4})}{(\frac{n^2}{4})} \right]^2 \times \left[\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{n^2}{8})}{(\frac{n^2}{8})} \right]^2 \text{--- (5)}$$

$$= \frac{1}{32} \times 1^2 \times 1^2 \text{--- (5)}$$

25

$$= \frac{1}{32} \text{--- (5)}$$

$$(05) F(n) = n^3 + 2n^2 + n + 2 = \phi(n)(n+2)^2 + An + B \text{--- (5)}$$

$$n = -2, -8 + 8 - 2 + 2 = 0 + (-2A + B)$$

$$-2A + B = 0 \text{--- (1) --- (5)}$$

$$F'(n) = 3n^2 + 4n + 1 = \phi'(n)(n+2)^2 + \phi(n) \cdot 2(n+2) + A \text{--- (5)}$$

$$n = -2, 12 - 8 + 1 = 0 + 0 + A$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 5 \\ B = 10 \end{array} \right\} \text{--- (5)}$$

25

$$\text{L.S.F} \quad 5n + 10 // \text{--- (5)}$$

$$(06) \frac{3n-1}{(1-n^2)(n+2)} = \frac{3n-1}{(1-n)(1+n)(n+2)}$$

$$= \frac{A}{1-n} + \frac{B}{1+n} + \frac{C}{n+2} \text{--- (10)}$$

$$3n-1 = A(n+1)(n+2) + B(1-n)(n+2) + C(1-n)(1+n)$$

$$n = -1; -4 = 2B \\ B = -2$$

$$n = 1; 2 = 6A \\ A = \frac{1}{3}$$

$$n = -2; -7 = -3C \\ C = \frac{7}{3}$$

3 = 5n + 10
2 = 5n + 10
1 = 5n + 10 X

$$\frac{3n}{(1-n^2)(n+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-n} + \frac{-2}{1+n} + \frac{\frac{1}{3}}{n+2} \quad \text{--- (5)} \quad \boxed{25}$$

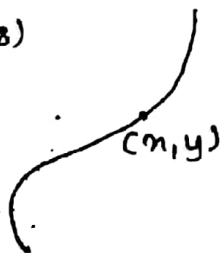
$$(07) \frac{d \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right]}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a}} \times \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{--- (10)}$$

$$= \frac{1}{a + x^2} \quad \text{--- (5)}$$

$$\Rightarrow \int d \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right] = \int \frac{1}{a + x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{a + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right) + C \quad \text{--- (10)} \quad \boxed{26}$$

(08)



$$x = t^2 \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

$$y = 2t - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2t}$$

$$= \frac{1}{t} \quad \text{--- (10)}$$

$$t = 2 \text{ ൽ } x = 4, y = 3 \quad \text{--- (5)}$$

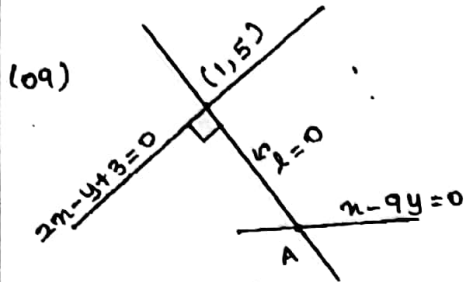
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = \frac{1}{2} \quad \text{--- (5)}$$

09) ചിട്ടയായ് ക്രമത്തിൽ

$$\frac{y-3}{x-4} = -2 \quad \text{--- (5)} \quad \boxed{25}$$

$$y-3 = -2x+8$$

$$2x+y-11=0 \quad \text{--- (5)}$$



$$L \equiv -x - 2y + \lambda = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$(1, 5) \Rightarrow -1 - 10 + \lambda = 0$$

$$\lambda = 11 \quad \text{--- (5)}$$

$$\therefore L \equiv -x - 2y + 11 = 0$$

$$L \equiv x + 2y - 11 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$x - 9y = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$9y + 2y - 11 = 0$$

$$11y = 11 \quad \text{--- (5)}$$

$$y = 1, \quad x = +9 \quad \text{--- (5)}$$

$$\Rightarrow A = (+9, +1) \quad \text{--- (5)}$$

25

(10) $\cot^2 \theta = 4$

$$\cot \theta = \pm 2 \quad \text{--- (5)}$$

$$\Rightarrow \cot \theta = -2 \quad (4^{\text{th}} \text{ quadrant})$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$1 + 4 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\operatorname{cosec} \theta = -\sqrt{5} \quad (4^{\text{th}} \text{ quadrant}) \quad \text{--- (5)}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\operatorname{cosec} \theta}{\sec \theta}$$

$$-2 = \frac{-\sqrt{5}}{\sec \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{--- (5)}$$

L.H.S

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sqrt{5}}{2} - (-\sqrt{5}) \right] \quad \text{--- (5)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \text{--- (5)}$$

= R.H.S

25

10

(a) $f(x) = x^3 - \frac{(3b-1)x^2}{a} + \frac{bx}{a} - \frac{1}{a}$ (5)

$x^2 - \frac{5x}{b} + \frac{1}{b} = (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ (5)

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{(3b-1)\frac{1}{4}}{a} + \frac{b}{2a} - \frac{1}{a} = 0$ (5)

$= \frac{1}{8} - \frac{3b}{4a} + \frac{b}{2a} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{a} = 0$

$\frac{1}{8} - \frac{b}{4a} - \frac{3}{4a} = 0$ (5)

$1 - \frac{2b}{a} - \frac{3}{a} = 0$

$a - 6b = 6$ (1) (5)

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} - \frac{(3b-1)\frac{1}{9}}{a} + \frac{b}{3a} - \frac{1}{a} = 0$ (5)

$a - 3(3b-1) + 9b - 27 = 0$

$a + 3 - 27 = 0$

(5) $a = 24$, $b = 9$ (5)

(17) $Q(x) = f(x) \left[\frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x - \frac{1}{3}} \right]$

$= (Ax + B)(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) \cdot \frac{2x - \frac{5}{6}}{(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})}$ (5)

$\phi(x) = 2(Ax + B)(x - \frac{5}{12})$ (5)

$\therefore (x - \frac{5}{12})$ க்கு $Q(x)$ திணிப்பு உள்ளது.

b/ $a(x^2+1) = x(a^2+1)$
 $ax^2 - x(a^2+1) + a = 0$

i/ $\therefore \Delta = (a^2+1)^2 - 4 \times a \times a$
 $= a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2$
 $= a^4 - 2a^2 + 1$
 $= (a^2-1)^2 > 0 \quad [|a| \neq 1]$

$\therefore a^2-1 = 0$ சீரடியாகது, மூலத்திந்தும் பீலக்சணம் மிகாண்பெற்றது .

ii/ $\alpha + \beta = \frac{a^2+1}{a}, \quad \alpha\beta = 1$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 - 2$
 $= \frac{a^4+1}{a^2}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)\alpha\beta$
 $= \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{a^2+1}{a}\right) \times 1$
 $= \frac{a^6+1}{a^3}$

iii/ $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$
 $= \left[\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 - 2\right]^2 - 2\alpha^2\beta^2$
 $= \left(\frac{a^4+1}{a^2}\right)^2 - 2$
 $= \frac{a^8+1}{a^4} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

$\alpha^3 + \alpha^4 + \beta^3 + \beta^4 = (\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^4 + \beta^4)$
 $= \frac{a^6+1}{a^3} + a^4 + \frac{1}{a^4}$
 $= a^3 + \frac{1}{a^3} + a^4 + \frac{1}{a^4}$

$$\begin{aligned}
 (\alpha^3 + \alpha^4)(\beta^3 + \beta^4) &= (\alpha\beta)^3 + (\alpha\beta)^4 + \alpha^3\beta^4 + \alpha^4\beta^3 \quad (5) \\
 &= 1 + 1 + 1(\alpha + \beta) \\
 &= 2 + \frac{a^2 + 1}{a} \\
 &= \frac{(a+1)^2}{a} \quad (6)
 \end{aligned}$$

∴ $\mu = 4$

$$\eta^2 - \left(a^3 + a^4 + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}\right)\eta + \left(\frac{a+1}{a}\right)^2 = 0 \quad (5)$$

$$\eta^2 - (a^3 + a^4 + a^{-3} + a^{-4})\eta + (a + 2 + a^{-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3, \mu = 4, \gamma = 1$$

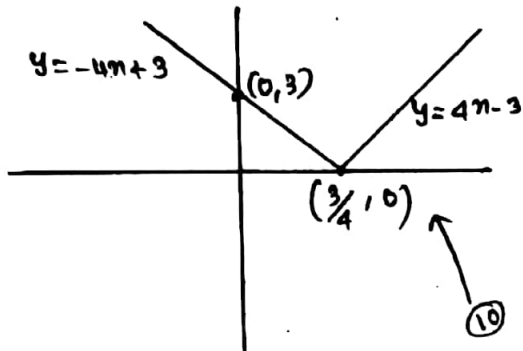
(10)

$$\begin{array}{r}
 3 - 10 \\
 2 - 5 \\
 1 - x
 \end{array}$$

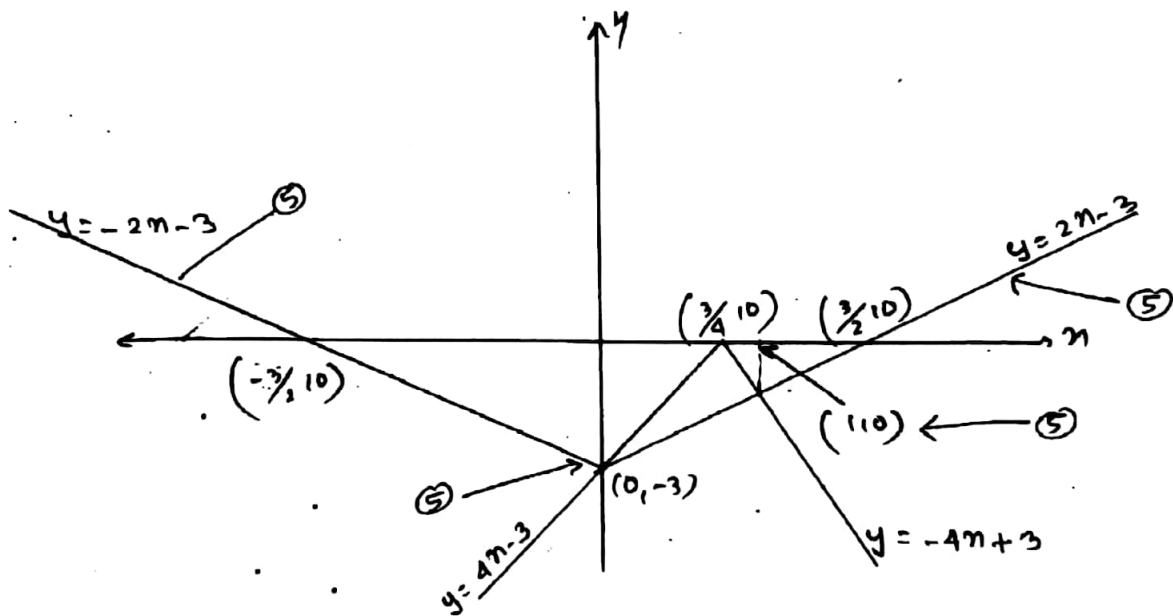
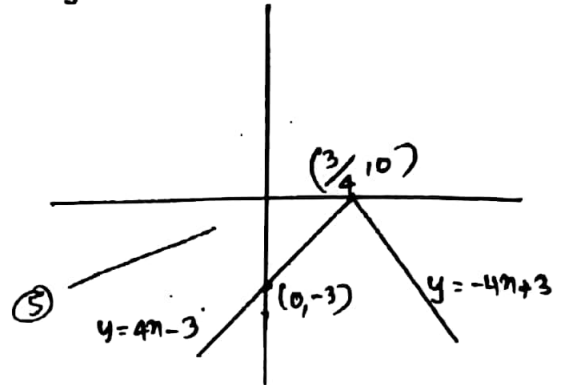
105

12)

a, $y = |4n - 3|$



$y = -|4n - 3|$



$|4n - 3| + 2|n| < 3$

$|4n - 3| < 3 - 2|n| \Rightarrow -|4n - 3| > 2|n| - 3$

$\therefore \{n \in \mathbb{R} : 0 < n < 1\}$

$n \rightarrow \frac{n}{2} \Rightarrow |4 \times \frac{n}{2} - 3| + 2|\frac{n}{2}| < 3$

$|2n - 3| + |n| < 3$

$\therefore \{n \in \mathbb{R} : 0 < \frac{n}{2} < 1\}$

$\{n \in \mathbb{R} : 0 < n < 2\}$

55

$$b) (3 + \sqrt{8})^{n^2-n+1} + (3 - \sqrt{8})^{n^2-n-1} = \frac{2}{3-\sqrt{8}} \quad (5)$$

$$(3 + \sqrt{8})^{n^2-n} \times (3 + \sqrt{8}) + (3 - \sqrt{8})^{n^2-n} \times \frac{1}{(3-\sqrt{8})} = \frac{2}{3-\sqrt{8}} \quad (5)$$

$$(3 + \sqrt{8})^{n^2-n} \times \frac{1}{(3-\sqrt{8})} + (3 - \sqrt{8})^{n^2-n} \times \frac{1}{3-\sqrt{8}} = \frac{2}{3-\sqrt{8}} \quad (5)$$

$$(3 + \sqrt{8})^{n^2-n} + \frac{1}{(3+\sqrt{8})^{n^2-n}} = 2 \quad (5)$$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \quad (5)$$

$$t^2 + (-2t) + 1 = 0$$

$$t = 1 \quad (5)$$

$$(3 + \sqrt{8})^{n^2-n} = 1 = (3 + \sqrt{8})^0 \quad (5)$$

$$n^2 - n = 0 \quad (5)$$

$$n = 1 // \text{ or } n = 0 // \quad (5)$$

[50]

$$c) n = 1 + \log_a bc \quad (5)$$

$$n = \log_a a + \log_a bc = \log_a abc \quad (10)$$

$$\frac{1}{n} = \log_{abc} a \quad (1) \quad (5)$$

$$\frac{1}{y} = \log_{abc} b \quad (2) \quad (5)$$

$$\frac{1}{z} = \log_{abc} c \quad (3) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c \quad (10) \\ &= \frac{yz + nz + ny}{nyz} = 1 \quad (5) \end{aligned}$$

$$yz + nz + ny = nyz // \quad (5)$$

12

$$a) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{3}\theta} \left[\frac{\sin(\pi/6 + \theta) \cos \pi/6 - \cos(\pi/6 + \theta) \sin \pi/6}{\sin \pi/3 \cos \theta - \sin \theta \cos \pi/3} \right]$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{3}\theta} \times \frac{\sin(0)}{\sin(\pi/3 - 0)}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(\pi/3 - \theta)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1 \times \frac{1}{\sin \pi/3}$$

$$= \frac{4}{3} //$$

30

$$b) y = \frac{1}{4} [n^2 \tan(n^2) + \ln |\cos n^2|]$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{1}{4} [n^2 \sec^2(n^2) \times 2n + \tan(n^2) \times 2n + \frac{1}{\cos n^2} \times -\sin(n^2) \times 2n]$$

$$= \frac{1}{4} \times 2n^3 \sec^2(n^2)$$

$$= \frac{n^3 \sec^2(n^2)}{2}$$

$$= \frac{n^3}{2 \cos^2(n^2)}$$

$$= \frac{n^3}{1 + \cos(2n^2)}$$

$$\frac{dy}{dn} [1 + \cos(2n^2)] = n^3 //$$

35

$$c) y = \sqrt{1 + \sqrt{n}}$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{n})^{-1/2} \left[\frac{1}{2} n^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{n}}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$y \frac{dy}{dn} = \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{1}{4} n^{-1/2} //$$

20

$$\frac{y}{4} \frac{dy}{dn} = \frac{1}{4} n^{-1/2}$$

$$y \frac{dy}{dn^2} + \left(\frac{dy}{dn}\right)^2 = \frac{1}{4} \times -\frac{1}{2} n^{-3/2} \quad (16)$$

$$y \frac{dy}{dn^2} = \frac{-n^{-3/2}}{8} - \left[\frac{n^{-1/2}}{4y}\right]^2 \quad (5)$$

$$= \frac{-n^{-3/2}}{8} - \frac{n^{-1}}{16y^2}$$

$$= \frac{-n^{-3/2}}{16} \left[2 + \frac{n^{1/2}}{1+\sqrt{n}}\right] \quad (2)$$

$$= \frac{-n^{-3}}{16} \left[\frac{2 + 2\sqrt{n} + \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}\right] = \frac{-x^3}{16} \left[\frac{2\sqrt{x} + 3x}{x + \sqrt{x}}\right]$$

$$\left. \frac{d^2y}{dn^2} \right|_{\substack{n=4 \\ y=\sqrt{n}}} = \frac{-4^{-3/2}}{16} \left[\frac{2 \times 2 + 3 \times 4}{2 + 4}\right]$$

$$= -\frac{1}{8 \times 16} \times \frac{16}{6} = -\frac{1}{48} \quad (10)$$

35

$$d. \quad y = \sin \left[2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \right]$$

$$y = \sin \left[2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \right] \quad (5)$$

$$y = \sin \left[2 \tan^{-1} (\tan \theta) \right] \quad (5)$$

$$y = \sin 2\theta \quad (5) \quad n = \cos 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos 2\theta \times 2 \quad (5)$$

$$\frac{dn}{d\theta} = -\sin 2\theta \times 2 \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{-n}{\sqrt{1-n^2}} \quad (5)$$

30

(15) (a) $\int \frac{1}{n(n+1)^2} dn$ $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2}$ (10)

$1 = A(n+1)^2 + B(n+1)n + cn$
 $n^2, 0 = A+B$
 $n=0, 1 = A+0$
 $A=1, B=-1$
 $n=-1, 1 = -c \Rightarrow c=-1$ (13)

$\int \frac{1}{n(n+1)^2} dn = \int \frac{1}{n} dn + \int \frac{-1}{n+1} dn + \int \frac{-1}{(n+1)^2} dn$ (5) [45]
 $= \ln|n| - \ln|n+1| - \frac{(n+1)^{-1}}{-1} + c$ (15)

b) $\int n \tan^{-1}(n+1) dn$ $u = \tan^{-1}(n+1)$ $\frac{du}{dn} = \frac{1}{1+(n+1)^2}$ $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}$
 $v = \frac{n^2}{2}$ (15)

$= \frac{n^2}{2} \tan^{-1}(n+1) - \int \frac{n^2}{2(1+2n+n^2)} dn$ (15)
 $= \frac{n^2}{2} \tan^{-1}(n+1) - \frac{1}{2} \left[\int \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+2} dn + \int \frac{-2n-2}{n^2+2n+2} dn \right]$ (5)
 $= \frac{n^2}{2} \tan^{-1}(n+1) - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \ln|n^2+2n+2| + c$ (15) [40]

c) $t = \sec n + \tan n$
 $\frac{dt}{dn} = \sec n \tan n + \sec^2 n = \sec n (\sec n + \tan n)$ (10)

$\mathcal{I} = \int \frac{\sec^2 n}{t^n} \times \frac{dt}{\sec n (\sec n + \tan n)}$ (10)

$\mathcal{I} = \int \frac{\sec n dn}{t^{n+1}}$ (1) + (2) $2 \sec n = \left(t + \frac{1}{t} \right)$
 $\sec^2 n - \tan^2 n = 1$
 $\sec n - \tan n = \frac{1}{t} - 0$

$$\Rightarrow I = \int \frac{(t + \frac{1}{t})}{2} \times \frac{dt}{t^{n+1}} \quad \text{--- (5)}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{t^{n+2}} + \frac{1}{t^n} \right] dt \quad \text{--- (6)}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{t^{n+1}} - \frac{1}{(n-1)} \times \frac{1}{t^{n-1}} \right] + c \quad \text{--- (6)}$$

45

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{(\sec x + \tan x)^4}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{n+1} \times \frac{1}{t^{n+1}} - \frac{1}{(n-1)} \times \frac{1}{t^{n-1}} \right]^{\pi/2} \quad \text{--- (5)}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} \times \frac{1}{(\sec x + \tan x)^5} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(\sec x + \tan x)^3} \right]^{\pi/2} \quad \text{--- (5)}$$

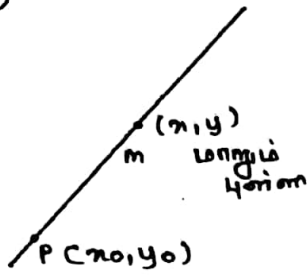
$$I = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \times 0 - \frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{3} \times 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{4}{15} \quad \text{--- (6)}$$

20

(16)



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad (10)$$

$$y - y_0 = x - x_0 = t \text{ சாரிக } \quad (5)$$

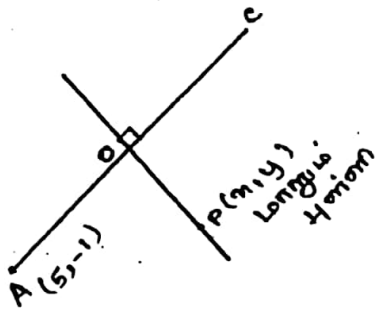
$$y - y_0 = mt$$

$$x - x_0 = t$$

$$y = y_0 + mt \quad (5)$$

$$x = x_0 + t \quad (5)$$

$$\Rightarrow \text{வரம்புசாரிக } \equiv (x_0 + t, y_0 + mt)$$



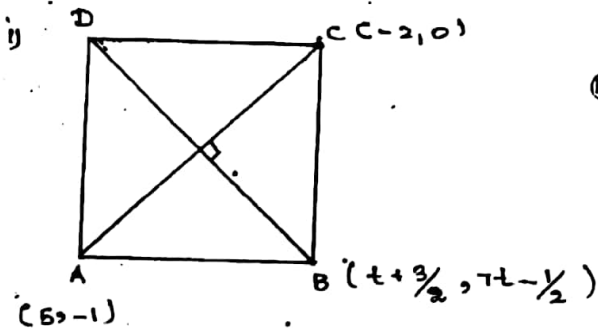
$$m_{AC} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$$

$$m_{PO} = 7 \quad (10)$$

$$O \equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

$$P \equiv \left(\frac{3}{2} + t, -\frac{1}{2} + 7t\right) \quad (10)$$

55



புறம்புசாரிக

$$B \equiv P \equiv \left(t + \frac{3}{2}, 7t - \frac{1}{2}\right) \quad (5)$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \quad (10)$$

$$\frac{7t - \frac{1}{2} + 1}{t + \frac{3}{2} - 5} \times \frac{7t - \frac{1}{2} - 0}{t + \frac{3}{2} + 2} = -1 \quad (10)$$

$$\frac{7t + \frac{1}{2}}{t - \frac{7}{2}} \times \frac{7t - \frac{1}{2}}{t + \frac{7}{2}} = -1$$

$$[(7t + \frac{1}{2})^2] + [t^2 - (-\frac{7}{2})^2] = 0$$

$$50t^2 - \frac{50}{4} = 0$$

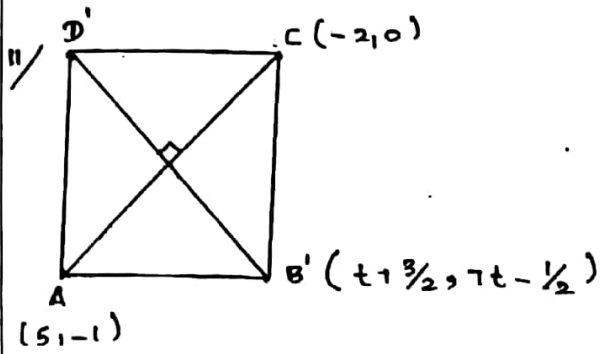
$$t^2 = \frac{1}{4}$$

$$t = \pm \frac{1}{2} \quad (5)$$

40

$$B \equiv (2, 3) \quad (5)$$

$$D \equiv (1, -4) \quad (5)$$



$$AC^2 = 1^2 + (5+2)^2 = 50$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{50} \quad \text{--- (10)}$$

$$B'O^2 = t^2 + (7t)^2 = 50t^2$$

$$\Rightarrow B'O = \sqrt{50t} \quad \text{--- (10)}$$

$$\therefore \text{ආකාරයෙන් } ABCD \text{ කිහිපයේ වර්ගය} = AC \times OB' = 50 \quad \text{--- (10)}$$

$$\sqrt{50} \times \sqrt{50t^2} = 50 \quad \text{--- (5)}$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm 1 \quad \text{--- (10)}$$

$t = 1$ යන විට

$$B' = \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right) \quad \text{--- (5)}$$

$t = -1$ යන විට

$$D' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right) \quad \text{--- (5)}$$

55

(17) (a) $2 \tan^{-1} n + \tan^{-1}(n+1) = \pi/2$

$\tan^{-1} n = 2\alpha \Rightarrow n = \tan \alpha$ $\tan^{-1}(n+1) = \beta \Rightarrow n+1 = \tan \beta$

$2\alpha + \beta = \pi/2$ — (5)

$2\alpha = \pi/2 - \beta$

$\tan 2\alpha = \tan(\pi/2 - \beta)$ — (6)

$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \cot \beta$ — (6)

$1 - \tan^2 \alpha$

$\frac{2n}{1-n^2} = \frac{1}{n+1}$ — (5)

$1 - n^2$ $n+1$

$2n = (1-n) [n \neq -1]$

$n = 1/3$ — (5)

25

$n = 1/3$

$2 \tan^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(4/3) = 3/2$

$\tan^{-1}(1/3) + 1/2 \tan^{-1}(4/3) = \pi/4$ — (5)

$\Rightarrow \cos[\pi/4 - 1/2 \tan^{-1}(4/3)] = \cos[\tan^{-1}(1/3)]$

$= 3/\sqrt{10}$ — (5)

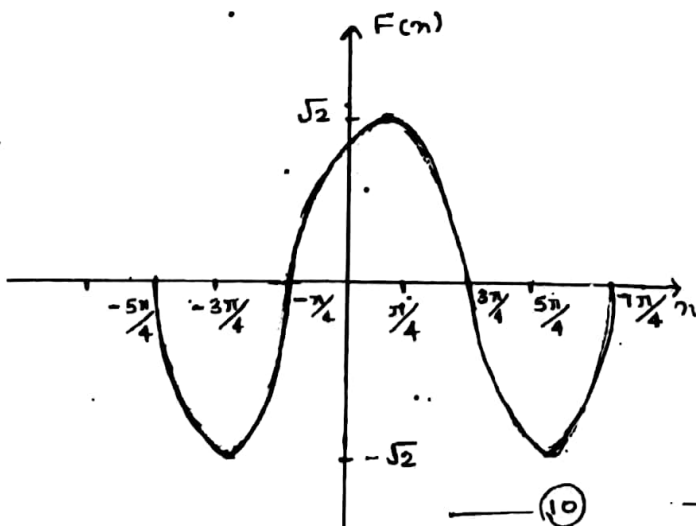
16

(b) $F(n) = \cos n + \sin n = \sqrt{2} [\cos \pi/4 \cos n + \sin \pi/4 \sin n]$ — (5)

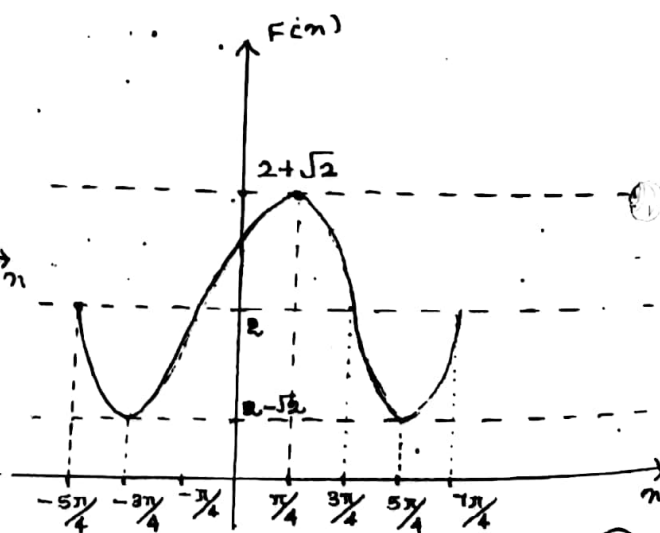
$= \sqrt{2} [\cos(n - \pi/4)]$ — (5)

$A = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4$ — (10)

$F(n) = \cos n + \sin n$



$F(n) = \cos n + \sin n + 2$



40

(c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \text{மாற்றல}$ — (10)

$\frac{b-c}{b+c}$ கிணைக் குறுக

$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k \sin B - k \sin C}{k \sin B + k \sin C}$ — (5)

$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$

$= \frac{2 \cos(\frac{B+C}{2}) \sin(\frac{B-C}{2})}{2 \sin(\frac{B+C}{2}) \cos(\frac{B-C}{2})}$ — (10)

$= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \tan(\frac{B-C}{2})}{2 \cos \frac{A}{2}}$ — (5)

$= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$ — (5)

$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ — (5)

$\tan(\frac{B-C}{2}) = \left(\frac{b-c}{b+c}\right) \left(\frac{1 + \cos A}{\sin A}\right)$

$b = \sqrt{3}c, A = \frac{\pi}{6}$

$\tan(\frac{B-C}{2}) = \left(\frac{\sqrt{3}c - c}{\sqrt{3}c + c}\right) \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}}\right)$ — (5)

$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) \times (2 + \sqrt{3})$

$= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$

$\tan(\frac{B-C}{2}) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ — (5)

$\frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{4}$

$B-C = \frac{\pi}{2}$ — (1) — (5)

but $B+C = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ — (2) — (5)

30

- 3^{ம்} சரியாயின் - 10
- 2 சரியாயின் - 5
- 1 சரியாயின் - X

①, ② $\Rightarrow B = \frac{2\pi}{3}, C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{6}$ — (10)

$\therefore \Delta ABC$ ஒர் கிரேயம்பக்க முக்கோணி

$B = \frac{2\pi}{3}$ எண்பதால் ABC ஒர் உறங்கோண முக்கோணி ஆகும் — (5)

35

(14)

(a) $y = \frac{2n-1}{(n-3)^2}$

$\frac{dy}{dn} = \frac{2(n-3)^2 - (2n-1)2(n-3)}{(n-3)^4}$

$= \frac{2(n-3) - 2(2n-1)}{(n-3)^3}$

$= \frac{2n-6-4n+2}{(n-3)^3}$

$= \frac{-2n-4}{(n-3)^3}$

$= \frac{-2(n+2)}{(n-3)^3}$

i) $n=0, y = -\frac{1}{9}$

$y=0, n = \frac{1}{2}$

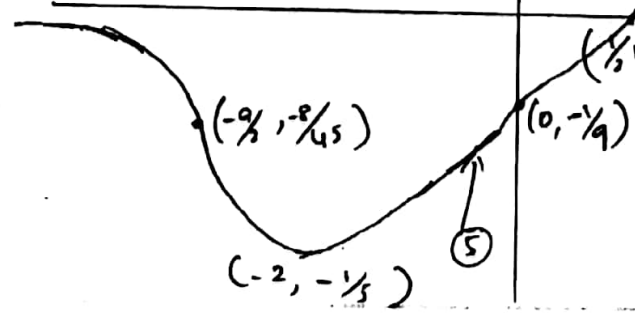
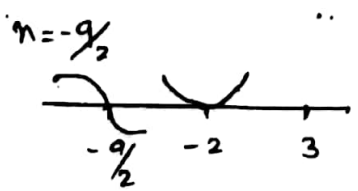
$(\frac{1}{2}, 0), (0, -\frac{1}{9})$

ii) $n=3$ ಡಿವಿ ಬಿ. ಆ. ಉಂಟು

iii) ಸಿ. ಯಿಂತ್ಯವು $\frac{dy}{dn} = 0$

$n = -2$

iv) ಡಿವಿ ಸಿ ಯಿಂತ್ಯವು $\frac{d^2y}{dn^2} = 0$



v)

$-\frac{9}{2} > n$	$-\frac{9}{2} < n < -2$	$-2 < n < 3$	$3 < n$
$\frac{dy}{dn} (-)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$
y ಡಿ. ಉಂ	ಡಿ. ಉಂ	ಉ. ಉಂ	ಡಿ. ಉಂ
$\frac{d^2y}{dn^2} (-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
ಡಿ. ಉಂ	ಉ. ಉಂ	ಉಂ. ಉಂ	ಉಂ. ಉಂ

$n = -2, y = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow (-2, -\frac{1}{5})$

$n = -\frac{9}{2}, y = \frac{-9-1}{(-\frac{9}{2}-3)^2}$

$= \frac{-10 \times 4}{15 \times 5}$

$= -\frac{8}{45}$

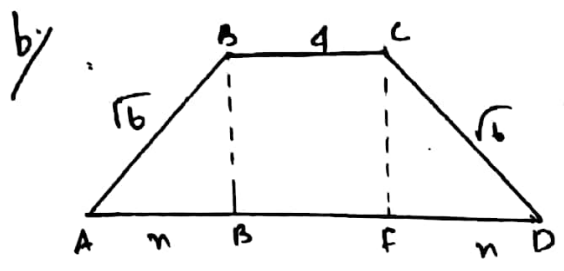
$(-\frac{9}{2}, -\frac{8}{45})$

vii) $n \rightarrow \pm \infty, y \rightarrow 0$

viii) $n \rightarrow 3^+, y \rightarrow \infty$

$n \rightarrow 3^-, y \rightarrow \infty$

100



$$A(n) = \frac{1}{2} \times (a + 2n + a) \times \sqrt{b-n^2} \quad \textcircled{1}$$

$$= \frac{1}{2} (8 + 2n) \sqrt{b-n^2} \quad \textcircled{2}$$

$$= (4+n) \sqrt{b-n^2} \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{d[A(n)]}{dn} = (4+n) \cdot \frac{1}{2} (b-n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2n) + \sqrt{b-n^2} \quad \textcircled{4}$$

$$= -\frac{(4+n)n + b-n^2}{\sqrt{b-n^2}} \quad \textcircled{5}$$

$$= -\frac{4n - n^2 + b - n^2}{\sqrt{b-n^2}} \quad \textcircled{6}$$

$$= -\frac{2n^2 - 4n + b}{\sqrt{b-n^2}} \quad \textcircled{7}$$

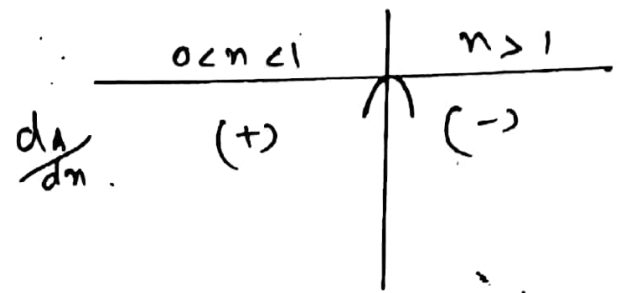
A(n) ၎်ဝိး ၎်လွှာ ၎်ပုဂ္ဂိုလ် $\frac{d[A(n)]}{dn} = 0$

$$-\frac{2n^2 - 4n + b}{\sqrt{b-n^2}} = 0 \quad \textcircled{8}$$

$$n^2 + 2n - 3 = 0$$

$$(n+3)(n-1) = 0$$

$$n = -3 \text{ or } n = 1$$



∴ n = 1 ၎်ဝိး A ၎်လွှာ ၎်ပုဂ္ဂိုလ်