



FWC

வடமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்தின் அனுசரணையுடன்
தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்

Field Work Centre

தவணைப் பரீட்சை, மார்ச் - 2017

Term Examination, March - 2017

தரம் :- 12 (2018)

இணைந்த கணிதம்

நேரம் :- 3 மணித்தியாலங்கள்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக் கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்த கணிதம்		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

இறுதிப்புள்ளிகள்

பகுதி - A

- (1) $a, b, c \in R$ எனவும் a, b, c வெவ்வேறானவை எனவும் கொள்வோம். x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் இருபடிச்சார்பு $y = x^2 - \frac{2}{3}(a + b + c)x + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ ஆனது x அச்சிற்கு மேலே இருக்கும் எனக் காட்டுக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (2) x, y, z நேர் மெய் எண்களாக அமைய, $\frac{1}{\log_{xy} xyz} + \frac{1}{\log_{yz} xyz} + \frac{1}{\log_{zx} xyz}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (3) $\frac{x-1}{x-2} \geq \frac{x-2}{x-3}$ எனும் சமனிலியின் தீர்வுத்தொடையை எழுதுக.

- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = 48$ எனக் காட்டுக.

- (5) $\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \phi = \frac{-3}{5}$ எனவும் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம். $\sin(\theta + \phi)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (6) $\frac{\cos \theta}{(2 \cos \theta - 1)(3 \cos \theta - 1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னமாக்குக.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

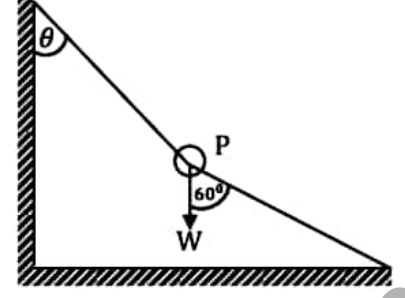
.....

.....

(7) கிடைத்தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி O வில் இருந்து நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிடையுடன் θ கோணத்தில் u வேகத்துடன் ஒரு துணிக்கை எறியப்படும்போது அது அடையும் அதியுயர் உயரம் h ஆகவும் எறியற் புள்ளி ஊடான கிடை வீச்சு R ஆகவும் இருப்பின், $\tan 2\theta = \frac{Rg}{u^2 - 4gh}$ எனக் காட்டுக.

(8) அலகுக் காவிகள் a, b ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனின், $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|a-b|}{|a+b|}$ எனக் காட்டுக.

(9) படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு W நிறை உடைய ஒரு துணிக்கை P யானது இரு இழைகளின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு ஒரு இழை நிலைக்குத்துடன் 60° இலும் மற்றைய இழை நிலைக்குத்துடன் $\theta (< 60^\circ)$ கோணத்திலும் இருக்க சமநிலையில் உள்ளது. தரையுடன் இணைக்கப்பட்ட இழையில் உள்ள இழுவை $2W$ எனின், மற்றைய இழையில் உள்ள இழுவையையும் θ வையும் காண்க.



(10) AB என்னும் ஓர் இலேசான கோலின் முனைகளில் w_1, w_2 என்னும் நிறைகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. கோலில் உள்ள புள்ளி C பற்றித் தொங்கவிடப்படும்போது கோல் கிடையாக சமநிலை அடைகின்றது எனின், $AC : CB$ யைக் காண்க.



FWC

வடமாகாணக் கல்வித் திணைக்களத்தின் அனுசரணையுடன்
தொண்டைமானாறு வெளிக்கள நிலையம் நடாத்தும்

Field Work Centre

தவணைப் பரீட்சை, மார்ச் - 2017

Term Examination, March - 2017

தரம் :- 12 (2018)

இணைந்த கணிதம்

பகுதி - B

(11) (a) $x^2 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம்.

(i) $\alpha + 3, \beta + 3$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டை p, q இன் சார்பில் காண்க.

(ii) இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - p(p^2 - 3q)x + q^3 = 0$ இன் மூலங்களை a, β இன் சார்பில் காண்க.

(iii) $x^2 - px + q = 0$ ஆனது வெவ்வேறு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் k இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + (2k - p)x + q - kp = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு வெவ்வேறு மெய்மூலங்கள் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(b) $f(x) \equiv (k^2 - 3)x^4 + kx^3 - 2x^2 + k^2 + 4$ இன் ஒரு காரணி $(x - 2)^2$ எனின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

k இன் இப்பெறுமானத்திற்கு x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) \geq 0$ எனக் காட்டுக.

(12) (a) $(2x)^{2n} = (3y)^{3n}, (3)^{2nx} = 2^{2ny}$ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கருதி $x = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

(b) $\frac{2x^3}{(x+1)(x-2)}$ என்பதை பகுதிப் பின்னமாக எழுதுக.

(c) x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களிற்கும் $\frac{x+2}{x^2+3x+6}$ என்னும் சார்பு $-\frac{1}{5}$ தொடக்கம் $\frac{1}{3}$ வரை பெறுமானம் எடுக்கும் எனக் காட்டுக.

(d) a, b மெய்யாக அமைய $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $a, b > 0, a+b=1$ என அமைய $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$ எனக் காட்டுக.

(13) (a) முதற்தத்துவத்திலிருந்து $\sqrt{1+x}$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

(b) பின்வருவனவற்றில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(i) $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

(ii) $y = \tan^{-1} \left\{ \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\}^{\frac{1}{2}}$; இங்கு $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(c) $y = (\sin^{-1}x)^2 + a \sin^{-1}x + b$ எனின் $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ எனக் காட்டுக. இங்கு a, b மாறிலிகள்

(d) $x^2y = a \cos nx$ எனின்

$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (n^2x^2 + 2)y = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு a, n மாறிலிகள்

(14) (a) $\sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x$ ஐத் தீர்க்க.

(b) $\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = \frac{\pi}{4}$ ஐத் தீர்க்க.

(c) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு சைன்நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

வழமையான குறியீடுகளுடன்

$(a^2-b^2) \cot c + (b^2-c^2) \cot A + (c^2-a^2) \cot B = 0$ எனக் காட்டுக.

(15) உற்பத்தி O வில் இருந்து கிடையுடன் θ கோணத்தில் u வேகத்துடன் ஒரு துணிக்கை ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் புவிமீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. $t = t$ யில் O குறித்து அதன் பாதையில் உள்ள புள்ளியின் ஆள்கூறு (x, y) எனின், $y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2 \theta$ எனக் காட்டுக.

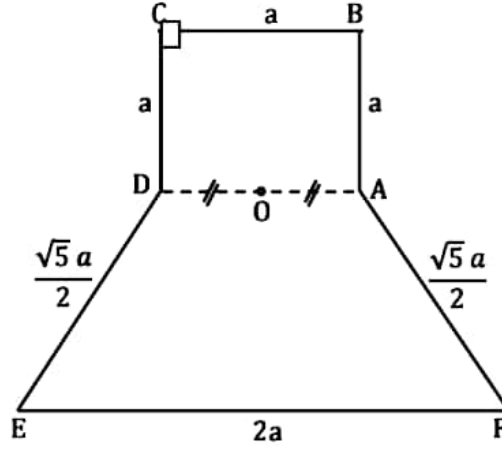
கிடைத் தரையில் இருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி O வில் இருந்து P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகள் முறையே u, v என்னும் வேகங்களுடன் முறையே கிடையாக, கிடையுடன் 60° கோணத்தில் மேல்நோக்கி ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படுகின்றன. இரு துணிக்கைகளும் R தூரத்தில் கிடைத்தரையை ஒரே புள்ளியில் அடிப்பின்,

(i) $R^2 = \frac{2u^2h}{g}$ எனக்காட்டுக.

(ii) $h = \frac{2gR^2}{v^2} - \sqrt{3}R$ எனக் காட்டுக.

(iii) $\frac{4u}{v^2} - \frac{1}{u} = \sqrt{\frac{6}{gh}}$ எனக்காட்டுக.

(16)



உருவில் உள்ள தளத்தின் மீது OA, OB, OC, OD, OE, OF வழியே முறையே $1, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ N பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனையும் அது OA யுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

இப்போது, தளத்தின் மீது OG, OH வழியே முறையே P, Q N பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. இங்கு G, H என்பன முறையே AB, AF இன் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின், P, Q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(17) (a) A, B என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே a, b ஆகும். AB யில் உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி C யின் தானக்காவியை $(1 - \alpha)a + \alpha b$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம் எனக்காட்டுக.

$ABCD$ என்பது ஒரு சரிவகம் ஆகும். $AB \parallel DC$, $AB = 2DC$, $AD = BC$ ஆகும். BC யின் நடுப்புள்ளி M ஆகும். நீட்டப்பட்ட AM நீட்டப்பட்ட DC யை N இல் சந்திக்கின்றது. $AN = \lambda AM$, $DN = \mu DC$, $\overrightarrow{DC} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$ எனக் கொண்டு,

- \overrightarrow{AN} ஐ a, b ஆகியவற்றில் காண்க.
- \overrightarrow{DN} ஐ a, b ஆகியவற்றில் காண்க.
- காவிக் கூட்டலைப் பயன்படுத்தி, λ, μ ஆகியவற்றைக் காண்க.
- இதிலிருந்து, M ஆனது AN இன் நடுப்புள்ளி எனக் காட்டுக.
- DN ஐ C பிரிக்கும் விகிதம் யாது?

(b) $12m$ நளமும் $270 kg$ நிறையும் உடைய AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் அதன் நடுப்புள்ளியிலிருந்து முறையே $5m, 4m$ தூரங்களில் உள்ள இரு புள்ளிகளில் கட்டப்பட்ட இரு நிலைக்குத்தான இழைகளினால் கிடை நிலையில் தாங்கப்படுகின்றது. இழைகளில் உள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

ஒவ்வோர் இழையும் தாங்கக்கூடிய மிகக்கூடிய நிறை $225 kg$ எனின், கோலில் இருந்து தொங்கவிடக்கூடிய மிகக்கூடிய நிறையைக் காண்க.

இந்நிறை தொங்கவிடப்படும் புள்ளிக்கும் கோலின் நடுப்புள்ளிக்கும் இடையேயான தூரத்தைக் காண்க.



FWC

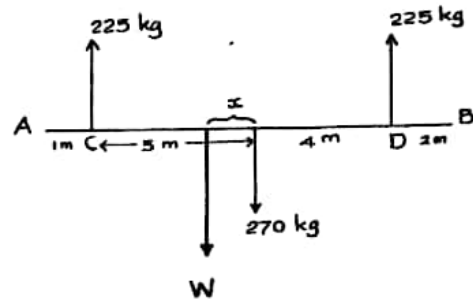
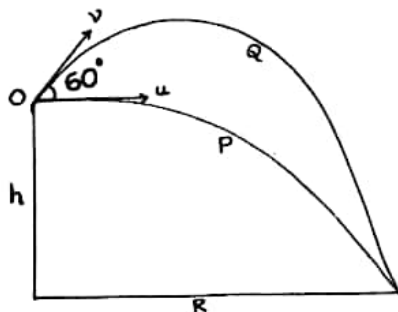
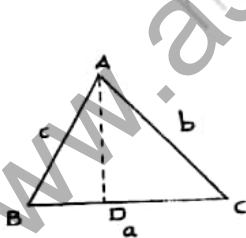
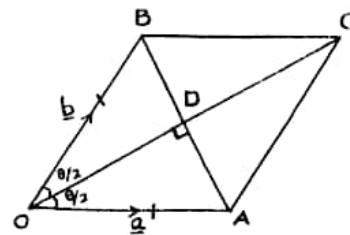
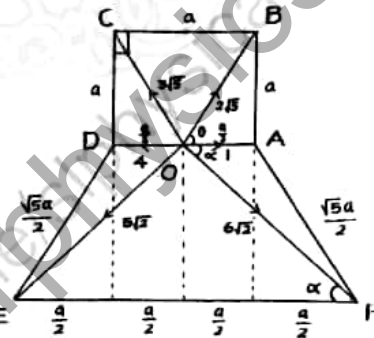
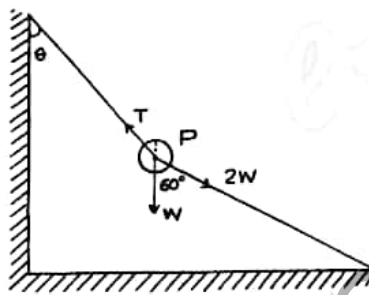
Field Work Centre - Thondaimanaru

Term Examination, March - 2018

Grade : 12 (2018)

— Combined Mathematics —

Marking Scheme



FWC

All Rights Reserved

$$01. \quad y = x^2 - \frac{2}{3}(a+b+c)x + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Delta = \frac{4}{9}(a+b+c)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)(a^2+b^2+c^2)$$

$$= \frac{4}{9} \{ a^2+b^2+c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3a^2 - 3b^2 - 3c^2 \}$$

$$= -\frac{4}{9} \{ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \}$$

$$= -\frac{4}{9} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \}$$

$$< 0 \quad (5)$$

$\therefore y > 0$ for all x (5)

\therefore The quadratic function is above the x -axis.

25

$$02. \quad \frac{1}{\log_{xy} xyz} + \frac{1}{\log_{yz} xyz} + \frac{1}{\log_{zx} xyz}$$

$$= \log_{xyz} xy + \log_{xyz} yz + \log_{xyz} zx \quad (10)$$

$$= \log_{xyz} (xy \cdot yz \cdot zx) \quad (5)$$

$$= \log_{xyz} (xyz)^2$$

$$= 2 \times \log_{xyz} xyz \quad (5)$$

$$= 2 \times 1 = 2 \quad (5)$$

25

$$03. \quad \frac{x-1}{x-2} \geq \frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} \geq 0; \quad x \neq 2, 3$$

$$\frac{(x-1)(x-3) - (x-2)^2}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \quad (5)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad (5)$$

$$\frac{-1}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad (5)$$

$$(x-2)(x-3) < 0 \quad [(x-2)^2 > 0, (x-3)^2 > 0]$$

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ (x-2)(x-3) \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{+++} \quad \text{---} \quad \text{+++} \end{array} \quad (5)$$

\therefore The set of solutions is $2 < x < 3$. (5)

25

$$04. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sqrt{x^2+9} - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x \{\sqrt{x^2+9} + 3\}}{(x^2+9-9)} \quad (10)$$

$$= 2 \times 4 \left\{ \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right\}^2 \lim_{x \rightarrow 0} \{\sqrt{x^2+9} + 3\}$$

$$= 8 (1)^2 \{\sqrt{9} + 3\}$$

$$= 48 \quad (5) \quad (5)$$

$$= 48$$

25

05. $\sin \theta = \frac{12}{13}$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \frac{144}{169} \\ &= \frac{25}{169} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi &= 1 - \cos^2 \phi \\ &= 1 - \frac{9}{25} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

$$\sin \phi = -\frac{4}{5} \quad (\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + \phi) &= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \\ &= \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= -\frac{56}{65} \quad (5) \end{aligned}$$

25

06. $\frac{\cos \theta}{(2 \cos \theta - 1)(3 \cos \theta - 1)} = \frac{A}{2 \cos \theta - 1} + \frac{B}{3 \cos \theta - 1} \quad (5)$

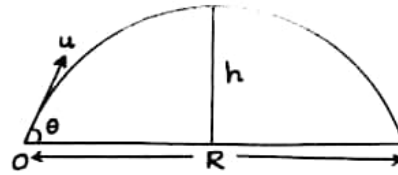
$$\cos \theta = A(3 \cos \theta - 1) + B(2 \cos \theta - 1) \quad (5)$$

$$\begin{cases} 3A + 2B = 1 \\ -A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{(2 \cos \theta - 1)(3 \cos \theta - 1)} = \frac{1}{2 \cos \theta - 1} - \frac{1}{3 \cos \theta - 1} \quad (5)$$

25

07.



$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{Rg}{u^2} \dots\dots (1)$$

$$h = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (5)$$

$$2gh = u^2 \sin^2 \theta$$

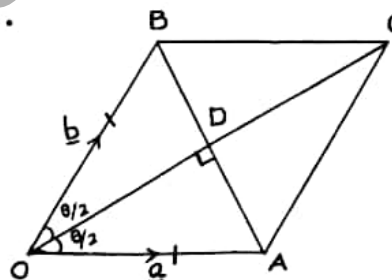
$$4gh = u^2 (1 - \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{u^2 - 4gh}{u^2} \dots\dots (2) \quad (5)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{Rg}{u^2 - 4gh} \quad (5)$$

25

08.



(5)

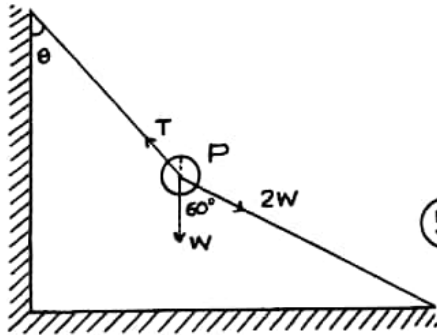
$$AB = |a - b| \quad (5)$$

$$OC = |a + b| \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{AD}{OD} = \frac{\frac{1}{2} AB}{\frac{1}{2} OC} \quad (10) \\ &= \frac{|a - b|}{|a + b|} \end{aligned}$$

25

09.



(5)

By Lami's theorem,

$$\frac{T}{\sin 60} = \frac{W}{\sin(120+\theta)} = \frac{2W}{\sin \theta} \quad (5)$$

$$\sin \theta = 2 \sin(120+\theta)$$

$$\sin \theta = 2 \sin 120 \cos \theta + 2 \cos 120 \sin \theta$$

$$\sin \theta = 2 \cos \theta \quad (5)$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} - \tan \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

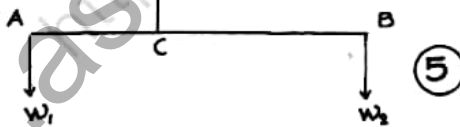
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$

$$T = \frac{W\sqrt{3}}{\sin \theta}$$

$$= \sqrt{7}W \quad (5)$$

25

10.



(5)

$$W_1 \cdot AC - W_2 \cdot BC = 0 \quad (10)$$

(5)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{W_2}{W_1}$$

$$AC : CB = W_2 : W_1 \quad (5)$$

25

11. (a)

(i) $x^2 - px + q = 0$ has the roots α and β .

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= p \\ \alpha \beta &= q \end{aligned} \right\} (5)$$

$$(\alpha+3) + (\beta+3)$$

$$= (\alpha + \beta) + 6$$

$$= p + 6 \quad (5)$$

$$(\alpha+3)(\beta+3)$$

$$= \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 \quad (5)$$

$$= q + 3p + 9 \quad (5)$$

\therefore The quadratic equation

whose roots are $\alpha+3$ and $\beta+3$ is

$$x^2 - (p+6)x + 3p+q+9 = 0.$$

(5)

25

(ii) $x^2 - p(p^2 - 3q)x + q^3 = 0$

$$x^2 - (\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta)x + (\alpha\beta)^3 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)x + (\alpha\beta)^3 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + \alpha^3\beta^3 = 0 \quad (5)$$

$$(x - \alpha^3)(x - \beta^3) = 0 \quad (5)$$

$$x = \alpha^3 \text{ or } x = \beta^3$$

\therefore The roots are α^3 and β^3 . (5)

25

(iii) If the roots of $x^2 - px + q = 0$ are real and distinct,

$$p^2 - 4q > 0 \quad \dots (1) \quad (10)$$

$$x^2 + (2k - p)x + q - kp = 0$$

$$\Delta = (2k - p)^2 - 4(q - kp) \quad (10)$$

$$= 4k^2 - 4kp + p^2 - 4q + 4kp$$

$$= 4k^2 + p^2 - 4q$$

$$> 0 \quad (\text{by (1)}) \quad (10)$$

\therefore For all real values of k , the roots of $x^2 + (2k - p)x + q - kp = 0$ are real and distinct.

30

(b) $f(x) \equiv (k^2 - 3)x^4 + kx^3 - 2x^2 + k^2 + 4$
 $\equiv (x - 2)^2 \phi(x) \quad (10)$

If $x = 2$, $16(k^2 - 3) + 8k - 8 + k^2 + 4 = 0 \quad (5)$
 $17k^2 + 8k - 52 = 0$
 $(k + 2)(17k - 26) = 0 \quad (5)$
 $k = -2$ or $k = \frac{26}{17} \quad \dots (1)$
 (5)

25

$f'(x) = (k^2 - 3)4x^3 + 3kx^2 - 4x$
 $= (x - 2)^2 \phi'(x) + \phi(x) 2(x - 2) \quad (10)$

When $x = 2$, $(k^2 - 3)32 + 12k - 8 = 0 \quad (5)$
 $8k^2 + 3k - 26 = 0$
 $(k + 2)(8k - 13) = 0 \quad (5)$

5

$k = -2$ or $k = \frac{13}{8} \quad \dots (2)$
 (5)

(1), (2) $\Rightarrow k = -2 \quad (5)$

$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8 \equiv (x^2 - 4x + 4) \cdot$
 $(x^2 + 2x + 2) \quad (10)$
 $\equiv (x - 2)^2 \{(x + 1)^2 + 1\}$
 $\geq 0 \quad (5)$

$\therefore f(x) \geq 0$, for all x .

45

12. (a) $(2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3} \quad \dots (1)$

$3^{\ln x} = 2^{\ln y} \quad \dots (2)$

(1) $\Rightarrow \ln 2 \cdot \ln 2x = \ln 3 \cdot \ln 3y \quad (5)$

$\Rightarrow \ln 2 (\ln 2 + \ln x) = \ln 3 (\ln 3 + \ln y) \quad \dots (3)$

(2) $\Rightarrow \ln x \cdot \ln 3 = \ln y \cdot \ln 2 \quad (5) \quad (5)$

$\Rightarrow \ln y = \frac{\ln x \cdot \ln 3}{\ln 2} \quad \dots (4)$
 (5)

(3), (4) $\Rightarrow \ln 2 (\ln 2 + \ln x) = \ln 3 \left\{ \ln 3 + \frac{\ln x \cdot \ln 3}{\ln 2} \right\} \quad (5)$

$\Rightarrow (\ln 2)^2 + \ln 2 \cdot \ln x =$

$(\ln 3)^2 + \ln x \cdot \frac{(\ln 3)^2}{\ln 2}$

$\Rightarrow (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2 = \frac{\ln x}{\ln 2} \left\{ (\ln 2)^2 - (\ln 3)^2 \right\} \quad (5)$

$\Rightarrow -1 = \frac{\ln x}{\ln 2} \Rightarrow -1 = \log_2 x \quad (5)$

$\Rightarrow 2^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (5)$

40

(b) $\frac{2x^3}{(x+1)(x-2)} = Ax + B + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}$ (10)

$2x^3 = (Ax+B)(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)$

$\Rightarrow A=2, B=2, C=\frac{2}{3}, D=\frac{16}{3}$
 (5) (5) (5) (5)

$\therefore \frac{2x^3}{(x+1)(x-2)} = 2x+2 + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{16}{3(x-2)}$

(5) 35

(c) Let $E = \frac{x+2}{x^2+3x+6}$

$\Rightarrow Ex^2 + (3E-1)x + 6E-2 = 0$ (5)

For the real values of x ,

$\Delta \geq 0$ (5)

$(3E-1)^2 - 4E(6E-2) \geq 0$ (5)

$15E^2 - 2E - 1 \leq 0$

$(5E+1)(3E-1) \leq 0$



$(5E+1)(3E-1) \leq 0$ (10)

$-\frac{1}{5} \leq E \leq \frac{1}{3}$ (5)

$\therefore E$ takes the values from $-\frac{1}{5}$ to $\frac{1}{3}$.

30

(d) $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$

$(a-b)^2 \geq 0$ (5)

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 4ab$ (5)

$(a+b)^2 \geq 4ab$ (5)

$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ --- (R)

15

$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b)$ [$\because a+b > 0$]
 (5)

when $a+b=1$

(R) $\Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$ (10)

Consider $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})$

$= 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$ (5)

$= 1 + \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab}$

$= 1 + \frac{2}{ab}$ (5)

$\geq 1 + 2(4) = 9$ (5)

30

$$\begin{aligned}
 13. (a) \quad f(x) &= \sqrt{1+x} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (5) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+h} - \sqrt{1+x}}{h} \quad (5) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+x+h) - (1+x)}{h \{\sqrt{1+x+h} + \sqrt{1+x}\}} \quad (10) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x+h} + \sqrt{1+x}} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad (5)
 \end{aligned}$$

35

$$(b) (i) \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+x+1)(2x-1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \quad (15) \\
 &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} \quad (5)
 \end{aligned}$$

20

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad y &= \tan^{-1} \left\{ \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \tan^{-1} \left\{ \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5) \\
 &= \tan^{-1} \{ \sec x + \tan x \} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + (\sec x + \tan x)^2} \left\{ \sec x \tan x + \sec^2 x \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{2 \sec x (\sec x + \tan x)} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \quad (5)$$

30

$$(c) \quad y = (\sin^{-1} x)^2 + a \sin^{-1} x + b$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = 2 \sin^{-1} x + a \quad (5)$$

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 2$$

35

$$(d) \quad x^2 y = a \cos nx \quad \dots (*)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y \cdot 2x = a(-\sin nx) \cdot n \quad (10)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot 2x + 2 \left\{ x \frac{dy}{dx} + y \cdot 1 \right\}$$

$$= -an \cos nx \cdot n \quad (15)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = -n^2 x^2 y \quad (5) \text{ (by *)}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (n^2 x^2 + 2)y = 0$$

30

$$14. (a) \sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x = \\ \cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x$$

$$\textcircled{5} \quad 2 \sin 2x \cos x - 3 \sin 2x = \\ 2 \cos 2x \cos x - 3 \cos 2x \quad \textcircled{5} \\ \sin 2x (2 \cos x - 3) = \\ \cos 2x (2 \cos x - 3) \quad \textcircled{5}$$

$$(2 \cos x - 3)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \quad \textcircled{5} \\ 2 \cos x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad \sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \quad \textcircled{5} \\ \text{impossible} \quad \textcircled{5} \quad 2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \textcircled{5} \quad n \in \mathbb{Z}$$

35

$$(b) \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Let } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \quad \textcircled{5}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 1 \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)}{1 - \left(\frac{x+1}{x+2}\right)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)} = 1 \quad \textcircled{10}$$

$$\frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2)}{(x^2-4) - (x^2-1)} = 1 \quad \textcircled{10}$$

$$\frac{x^2 - x - 2 + x^2 + x - 2}{-3} = 1$$

$$\frac{2x^2 - 4}{-3} = 1 \quad \textcircled{10}$$

$$2x^2 = 1$$

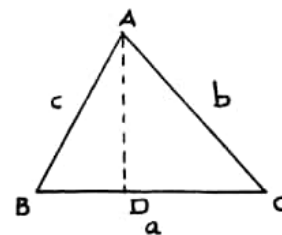
$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{5}$$

45

(c) sine rule with the usual notation:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \textcircled{5}$$

Situation I ABC is an acute-angled triangle

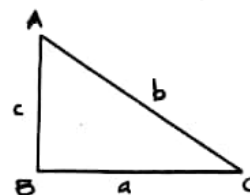


$$AD = AB \sin B = AC \sin C$$

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \textcircled{5}$$

$$\text{similarly, } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

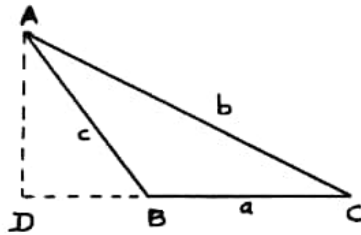
Situation II ABC is a right-angled triangle



$$AB = AC \sin C = AB \sin B$$

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (5)$$

Situation III ABC is an obtuse-angled triangle



$$AD = AB \sin(\pi - B) = AC \sin C$$

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (5)$$

20

$$\text{Let } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k.$$

Consider $(a^2 - b^2) \cot C$

$$= (k^2 \sin^2 A - k^2 \sin^2 B) \frac{\cos C}{\sin C} \quad (5)$$

$$= \frac{k^2}{2} \{ (1 - \cos 2A) - (1 - \cos 2B) \} \frac{\cos C}{\sin C} \quad (10)$$

$$= \frac{k^2}{2} \{ \cos 2B - \cos 2A \} \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{k^2}{2} 2 \sin(A+B) \sin(A-B) \frac{\cos C}{\sin C} \quad (10)$$

$$= -\frac{k^2}{2} 2 \sin(A-B) \cos(A+B) \quad (5)$$

$$= -\frac{k^2}{2} (\sin 2A - \sin 2B)$$

$$= \frac{k^2}{2} (\sin 2B - \sin 2A) \quad (5)$$

Similarly

$$(b^2 - c^2) \cot A = \frac{k^2}{2} (\sin 2C - \sin 2B) \quad (5)$$

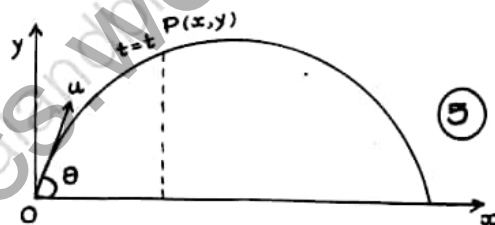
$$(c^2 - a^2) \cot B = \frac{k^2}{2} (\sin 2A - \sin 2C) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore & (a^2 - b^2) \cot C + (b^2 - c^2) \cot A + \\ & (c^2 - a^2) \cot B \\ &= \frac{k^2}{2} \{ \sin 2B - \sin 2A + \sin 2C - \sin 2B \\ & \quad + \sin 2A - \sin 2C \} \quad (5) \end{aligned}$$

$$= 0$$

50

15.



$$O \rightarrow P: \rightarrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

$$x = u \cos \theta \cdot t \quad (10)$$

$$O \rightarrow P: \uparrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

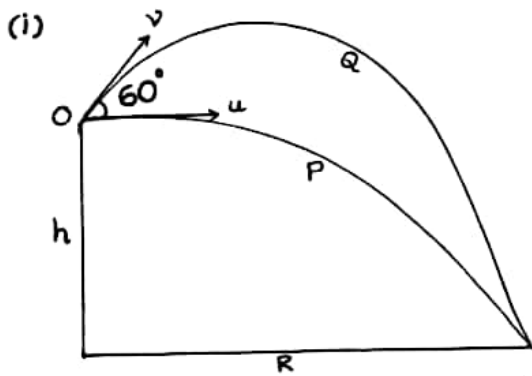
$$y = u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (10)$$

$$= u \sin \theta \cdot \frac{x}{u \cos \theta}$$

$$- \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{u^2 \cos^2 \theta} \quad (10)$$

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2 \sec^2 \theta}{2u^2} \quad (5)$$

40



$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2 \theta \quad (10)$$

When $y = -h$, $x = R$, $\theta = 0$ for the particle P; (15)

$$-h = -\frac{1}{2} \frac{gR^2}{u^2} \quad (15)$$

$$R^2 = \frac{2u^2h}{g} \quad (5)$$

45

(ii) When $y = -h$, $x = R$, $\theta = 60^\circ$ for the particle Q; (15)

$$-h = R \sqrt{3} - \frac{1}{2} \frac{gR^2}{v^2} \cdot 4 \quad (15)$$

$$-h = \sqrt{3}R - \frac{2gR^2}{v^2}$$

$$h = \frac{2gR^2}{v^2} - \sqrt{3}R \quad (5)$$

35

(iii) $\sqrt{3}R = \frac{2gR^2}{v^2} - h$

$$3R^2 = \left(\frac{2gR^2}{v^2} - h\right)^2 \quad (10)$$

$$\frac{6u^2h}{g} = \left(\frac{4u^2h}{v^2} - h\right)^2 \quad (5)$$

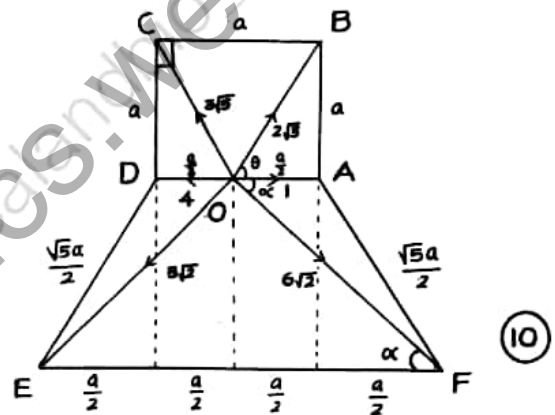
$$\frac{6u^2}{g} = \frac{h}{v^4} (4u^2 - v^2)^2$$

$$\sqrt{\frac{6}{gh}} \cdot u = \frac{4u^2}{v^2} - 1 \quad (10)$$

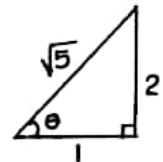
$$\frac{4u}{v^2} - \frac{1}{u} = \sqrt{\frac{6}{gh}} \quad (5)$$

30

16.



$$\tan \theta = 2 \quad (5)$$



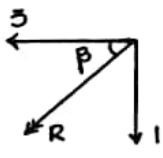
$$\alpha = 45^\circ \quad (5)$$

$$\vec{OA} \cdot x = 1 + 2\sqrt{5} \cos \theta - 3\sqrt{5} \cos \theta - 4 - 5\sqrt{2} \cos \alpha + 6\sqrt{2} \cos \alpha \quad (15)$$

$$= -3 - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 OA \uparrow \quad Y &= 2\sqrt{5} \sin \theta + 3\sqrt{5} \sin \theta \\
 &\quad - 5\sqrt{2} \sin \alpha - 6\sqrt{2} \sin \alpha \quad (15) \\
 &= 5\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 11\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= -1 \quad (5)
 \end{aligned}$$



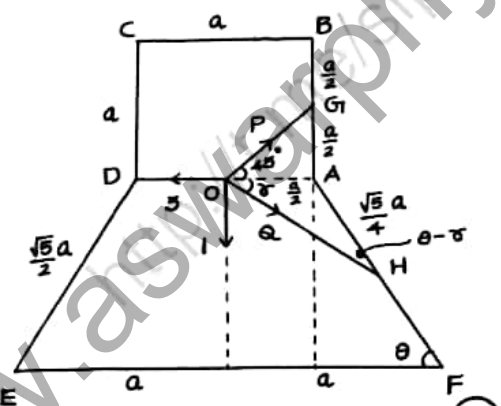
$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{3^2 + 1^2} \\
 &= \sqrt{10} \text{ N} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{3} \quad (5)$$

Angle making with OA is $\pi + \tan^{-1}(\frac{1}{3})$.

(5) (5)

80



$$\hat{AFE} = \theta \quad (5)$$

$$\hat{AHO} = \theta - \tau \quad (5)$$

By sin rule in ΔAOH ,

$$\frac{\frac{\sqrt{5}a}{4}}{\sin \tau} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin(\theta - \tau)} \quad (5)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2 \sin \tau} = \frac{1}{\sin(\theta - \tau)}$$

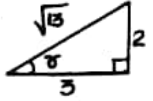
$$\sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos \tau - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \tau \right) =$$

$$2 \sin \tau \quad (5)$$

$$2 \cos \tau - \sin \tau = 2 \sin \tau$$

$$2 \cos \tau = 3 \sin \tau$$

$$\tan \tau = \frac{2}{3} \quad (5)$$



For the equilibrium,

$$\rightarrow x = 0 \quad \& \quad \uparrow Y = 0.$$

$$(5)$$

$$(5)$$

$$\rightarrow P \cos 45 + Q \cos \tau - 3 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{P}{\sqrt{2}} + Q \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 3 \quad \dots (1)$$

$$\uparrow P \sin 45 - Q \sin \tau - 1 = 0 \quad (10)$$

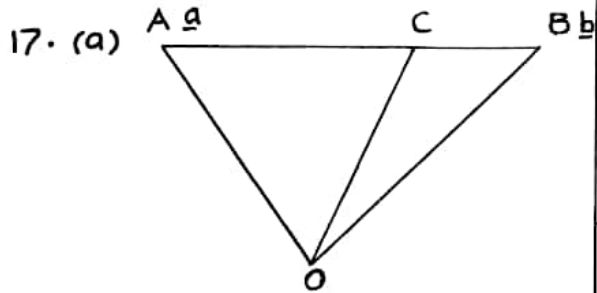
$$\frac{P}{\sqrt{2}} - Q \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 1 \quad \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P = \frac{9\sqrt{2}}{5}, \quad Q = \frac{2\sqrt{13}}{5}$$

$$(5)$$

$$(5)$$

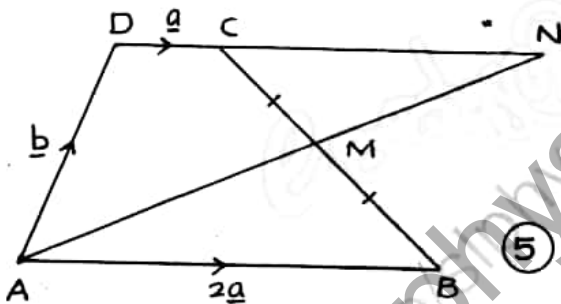
70



$$\begin{aligned} \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \quad (5) \\ &= \underline{a} + \alpha \vec{AB} \quad (5) \\ &= \underline{a} + \alpha (\underline{b} - \underline{a}) \quad (5) \\ &= (1 - \alpha)\underline{a} + \alpha \underline{b} \end{aligned}$$

15

(i)



$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{BA} + \vec{AC} \\ &= \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DC} \quad (5) \\ &= -2\underline{a} + \underline{b} + \underline{a} \\ &= \underline{b} - \underline{a} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ &= 2\underline{a} + \frac{1}{2} \vec{BC} \quad (5) \\ &= 2\underline{a} + \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{a}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{b} + 3\underline{a}) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AN} &= \lambda \vec{AM} \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{2} (\underline{b} + 3\underline{a}) \quad (5) \end{aligned}$$

30

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \vec{DN} &= \mu \vec{DC} \\ &= \mu \underline{a} \quad (5) \end{aligned}$$

05

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \vec{AD} &= \vec{AN} + \vec{ND} \quad (5) \\ \underline{b} &= \frac{\lambda}{2} (\underline{b} + 3\underline{a}) - \mu \underline{a} \end{aligned}$$

$$\left(\mu - \frac{3\lambda}{2}\right) \underline{a} + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \underline{b} = \underline{0} \quad (5)$$

$$\mu - \frac{3\lambda}{2} = 0 \quad \& \quad 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\mu = 3 \quad \& \quad \lambda = 2 \quad (5)$$

20

$$\text{(iv)} \quad AN = 2 AM \quad (5)$$

$$\frac{AN}{AM} = \frac{2}{1}$$

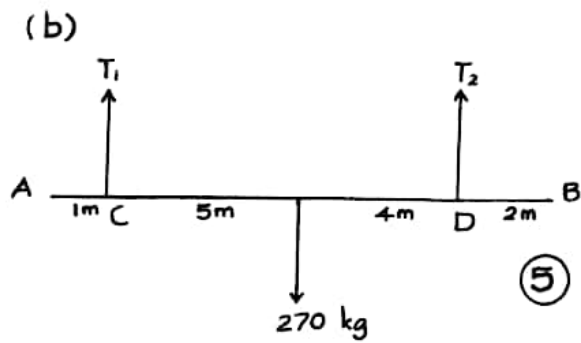
\Rightarrow M is the mid-point of AN. (5)

10

$$\text{(v)} \quad DN = 3 DC \quad (5)$$

$$\frac{DN}{CN} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

10



⑤

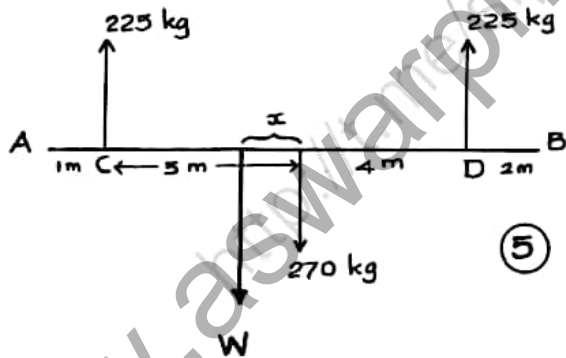
$$\curvearrowright T_2 \cdot 9 - 270 \cdot 5 = 0 \quad (5)$$

$$T_2 = 180 \text{ kg} \quad (5)$$

$$\uparrow T_1 + T_2 = 270 \quad (5)$$

$$\therefore T_1 = 120 \text{ kg} \quad (5)$$

25



⑤

$$\downarrow W + 270 = 450 \quad (5)$$

$$W = 180 \text{ kg} \quad (5)$$

15

$$\curvearrowright 270 \cdot 5 + W(5-x) - 225 \cdot 9 = 0 \quad (10)$$

$$W(5-x) = 675$$

$$180(5-x) = 675 \quad (5)$$

$$x = 5 - 3.75$$

$$= 1.25 \text{ m} \quad (5)$$

20